Devoir de Mathématiques N^o 2 (2 heures)

Le barème est approximatif.

Exercice 1 : (2 points)

Résoudre
$$\begin{cases} -x^2 - x + 2 \leq 0 \\ 2x^2 + x - 15 < 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : (2 points)

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes. Aucune justification de dérivabilité n'est demandée :

1. $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x^2}}\,; \quad D = \mathbb{R}.$
2. $g(x) = \sin(\sqrt{(x+1)^3})\,; \quad D = \mathbb{R}_+.$

Exercice 3 : (4 points)

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Démontrer que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.

Exercice 4 : (2 points)

On donne f définie par
$$f(x) = \frac{x^2-4}{|x|-2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Ecrire f sans valeur absolue.
3. Démontrer que f est continue sur D.
4. Représenter la courbe représentative de f.

Exercice 5 : (2 points)

On considère la fonction suivante définie $D =]-2;1[$.
$$f(x) = E(x)\sin x \qquad E \text{ désignant la fonction partie entière}$$
Etudiez la continuité de f sur D.

Exercice 6 : (3 points - Non spécialiste)

On donne considère l'équation
$$\sin x = 1 - x \tag{E}$$

1. Justifier que la fonction $f : x \longrightarrow x + \sin x - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Etudiez les limites de cette fonctions en $-\infty$ et $+\infty$.
3. En déduire le nombre de solution de (E).

Exercice 7 : (5 points)

1. On considère P définie sur $D =]-1;+\infty[$ par
$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$
   (a) Etudier les variations de P
   (b) Montrer que $P(x) = 0$ admet une unique racine réelle α sur D et que $1 \leq \alpha \leq 2$.
2. On considère la fonction numérique f définie sur D par
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$
   (a) Déterminer les limites de f aux bornes de D.
   (b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. En utilisant la définition de α, montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$.

Exercice 8 : (1 point - Spécialiste)

1. Justifier que 67 est un nombre premier.
2. Quel est le plus petit entier n qui multiplié par 2010 est un carré parfait. (c'est-à-dire il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $n \times 2010 = a^2$).

Exercice 9 : (1 point - Spécialiste)

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Montrer que pour $n \geq 3$ $N = n! + n - 1$ n'est jamais premier.

Exercice 10 : (1 point - Spécialiste)

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. En utilisant le reste de la division euclidienne de p par 4, montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 8.