Devoir de Mathématiques N^o 10 (1h30 mn)

1 Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n, la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.
On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1.
2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n). Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

   Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.
   Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?
3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

   On admet que $X_{n+1} = M \times X_n$ et que, pour tout entier naturel n,
   $X_n = M^n \times X_0$.
   On définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}8 \\ -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

   a) Démontrer que $M = A + 0{,}5B$.
   b) Vérifier que $A^2 = A$, et que $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
      On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.
   c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0{,}5^n B$.
   d) En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0{,}8 - 0{,}8 \times 0{,}5^n$.
   e) À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?

2 On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.
Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M. On le note $\det(M)$.
Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \dfrac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.
   Justifier que N est l'inverse de M.
2. On considère l'équation (E) : $\quad \det(M) = 3$.
   On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a\ ;\ b)$ solutions de l'équation (E).
   a) Vérifier que le couple $(6\ ;\ 3)$ est une solution de (E).
   b) Montrer que le couple d'entiers $(a\ ;\ b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a - 6) = 5(b - 3)$.
   En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
   En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q.
2. *Codage avec la matrice* Q
   Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :
   Étape 1 : On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

   Étape 2 : La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que
   $Y = QX$.
   Étape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
   Étape 4 : À la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

$$\text{Exemple :JE} \to X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \to \text{OF}.$$

   Le mot JE est codé en le mot OF.
   Coder le mot DO.
3. *Procédure de décodage*
   On conserve les mêmes notations que pour le codage.
   Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que
   $Y = QX$.
   a) Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $\left\{\begin{array}{lcrl} 3x_1 & = & 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 & = & -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{array}\right.$
   b) En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$, montrer que $\left\{\begin{array}{lcrl} x_1 & \equiv & r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 & \equiv & 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{array}\right.$
   c) Décoder le mot SG.