Devoir de Mathématiques N^o 8 (2h)

0 Nom et prénom :

1 Partie A

On considère l'équation

$$51x - 26y = 1$$

où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.
2. a) Donner un couple solution $(x_0\ ;\ y_0)$ de cette équation.
   b) Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.
La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y.

1. Coder la lettre N.
2. En utilisant la partie A, déterminer l'entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $51a \equiv 1\ [26]$.
3. Démontrer que si la lettre correspondant à un entier x est codée par une lettre correspondant à un entier y, alors x est le reste de la division euclidienne de $ay + 2$ par 26.
4. Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N.
5. On applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre x correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on ?

2 BONUS

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a,b \in \mathbb{Z}$, $a - b$ divise $a^n - b^n$.
2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $2^n + 1$ premier alors n est une puissance de 2 *(vous pourrez utiliser la question précédente)*.

3 **Partie A**

Le but de celle partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
   On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :
   $$E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1.$$
   Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.
On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1. a) Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

   b) D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier ?
2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.
   a) Justifier l'égalité : $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \cdots + (2^p)^{q-1} = \dfrac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$.
   b) En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.
   c) En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.
3. a) Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.
   b) Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b. ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2.$$

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0 \quad \text{modulo} \quad M_n$. Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables :	u,M,n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 3$
	M prend la valeur ......
	Pour i allant de 1 à ... faire
	u prend la valeur ...
	Fin Pour
	Si M divise u alors afficher « M .... »
	sinon afficher « M .... »

   Compléter cet algorithme de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue.