

DS 6 de spécialité

① Nous avons

$$99 = 2 \times 43 + 13$$

$$43 = 3 \times 13 + 4$$

$$13 = 3 \times 4 + 1$$

$$\begin{aligned} \text{ainsi } 1 &= 13 - 3 \times 4 \\ &= 13 - 3 \times (43 - 3 \times 13) \\ &= 10 \times 13 - 3 \times 43 \\ &= 10(99 - 2 \times 43) - 3 \times 43 \\ &= 10 \times 99 - 23 \times 43 \end{aligned}$$

ainsi le couple $(11; -23)$ est solution particulière de l'équation $99x + 43y = 1$.

② (E): $25x - 108y = 1$; (on remarque bien que $25 \wedge 108 = 1$)

① pour $x = 13$; $y = 3$ nous avons $25 \times 13 - 108 \times 3 = 325 - 324 = 1$

donc $(13, 3)$ solution particulière de (E).

② Nous avons pour (x, y) solution de (E):

$$25x - 108y = 1$$

$$25 \cdot 13 - 108 \cdot 3 = 1$$

$$\text{donc par différence } 25(x - 13) - 108(y - 3) = 0$$

$$\text{et donc } 25(x - 13) = 108(y - 3) \quad (*)$$

$$\text{ainsi } 25 \mid 108(y - 3)$$

$$\text{et } 25 \wedge 108 = 1$$

$$\text{donc par th de Gauss } 25 \mid y - 3$$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y-3=25k$

et en remplaçant (*) on a $25(x-13)=108 \times 25k$

et donc $x-13=108k$.

Nous déduisons alors que $x=13+108k$ et $y=3+25k$.

Vérifions les solutions:

pour $x=13+108k$; $y=3+25k$; $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{on a } 25x - 108y &= 25(13+108k) - 108(3+25k) \\ &= 25 \times 13 - 108 \times 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \{(13+108k; 3+25k); k \in \mathbb{Z}\}$

III $49x - 63y = 2$

Nous avons $49 \wedge 63 = 7^2 \wedge 7 \cdot 9 = 7 \cdot (7 \wedge 9) = 7$

ainsi si (x, y) solution de (E) alors $49x - 63y = 2$

mais $7 \nmid 49$; $7 \nmid 63$ donc par combinaison linéaire

$7 \nmid 49x - 63y$ donc $7 \nmid 2$ ce qui est absurde !

IV $6x = 15y$

Donc $S = \emptyset$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2x = 3 \cdot 5y \Leftrightarrow 2x = 5y$$

donc $\left. \begin{array}{l} 2 \mid 15y \\ 2 \nmid 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Théorème} \\ \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } y = 2k \end{array}$

On a alors $2x = 5 \times 2k$ donc $x = 5k$

Réciproquement $(5k, 2k)$ est solution car $6 \times 5k = 30k$; $15 \times 2k = 30k$ $\uparrow$

Donc $S = \{(5k, 2k); k \in \mathbb{Z}\}$