

Correction DS

Modulo 4

<u>1</u>	x	0	1	2	3	
	x^2	0	1	0	1	

- 2) Raisonnons par l'absurde en supposant que (F) admette une solution (x, y) dans $\mathbb{Z}^2$.
On a, modulo 4,

$$1 \equiv \underbrace{7x^2}_{\equiv -x^2} - \underbrace{4y^2}_{\equiv 0} \equiv -x^2 \equiv \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases} [4] \text{ d'après le tableau}$$

Absurde. Donc (F) n'a pas de solution.

- 3) Soit (x) une solution de (E).

$$\equiv (x+3)^2 \equiv (x-1)^2 [4]$$

D'après le tableau $x-1 \equiv \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} [4]$.

Ainsi $x \equiv \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases} [4] \equiv \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases} [4]$.

Ainsi x s'écrit $4k+2$ ou $4k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, on vérifie que cette forme convient.

Toutes les solutions sont donc $\{4k+2\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{4k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

2

1) L'algorithme affiche 3 : on ne rentre pas dans la boucle.
Tant que.

2) L'algorithme affiche 3 :

car x prend les valeurs successives :

étape 0. $x = 55$.

étape 1 $\rightarrow x = 42 \geq 13$

étape 2 $\rightarrow x = 29 \geq 13$

étape 3 $\rightarrow x = 16 \geq 13$.

étape 4 $\rightarrow x = 3 < 13$.

3) Si A est négatif, l'algorithme affiche A .

Si A est positif, l'algorithme affiche le reste de la div euclidienne de A par 13.

En effet $A = 13q + r$ avec $0 \leq r < 13$ et $q \geq 0$.

Après q étapes, on arrive à $A = r < 13$.

Car à l'étape k , x vaut $13(q-k) + r \geq 13$ tant que $q-k \geq 1$.

③ La proposition est fausse.

En effet. $x \equiv 0 [5] \Rightarrow x^3 + x + 3 \equiv 0 [5]$.

est Fausse.

En prenant $x=0$ ou a $x \equiv 0 [5]$ $\textcircled{\text{ET}}$ $x^3 + x + 3 \equiv 3 [5]$.
70

i) Bonus.

1) Il faut regarder modulo 10.

$$\text{On a } 7 \equiv -3 [10].$$

$$7^2 \equiv (-3)^2 \equiv 9 \equiv -1 [10].$$

Donc en élevant au carré on a $7^4 \equiv 1 [10]$.

Ensuite, on regarde 7^k modulo 4.

$$7 \equiv -1 [4] \text{ donc } 7^2 \equiv 1 [4].$$

$$\text{Ainsi } 7^7 \equiv (7^2)^3 7 \equiv -1 [4].$$

$$\text{Donc } 7^7 = 4k + 3 \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ensuite, } 7^{7^7} &\equiv (7^4)^k 7^3 \equiv 7^3 [10] \\ &\equiv -7 [10] \equiv 3 [10]. \end{aligned}$$

Le chiffre des unités est 3.

②. Si $x \equiv 0 [3]$

Alors $x = 3k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Alors $x^3 = 9(3k^3)$ Donc $x^3 \equiv 0 [9]$

Maintenant si $x^3 \equiv 0 [9]$ on a $9 \mid x^3$.

Donc 3 apparaît dans la décomposition en facteurs premiers de x^3 car $9 = 3^2$.

Donc 3 apparaît dans la décomposition en facteurs premiers de x , i.e. $3 \mid x$ d'où $x \equiv 0 [3]$.

La proposition est vraie .