

Devoir de Mathématiques N° 2 (30mn)

1 Le but de cet exercice est de montrer que tout nombre premier $p \geq 3$ peut s'écrire comme une différence de deux carrés.

1. Montrer que si p s'écrit sous la forme $p = a^2 - b^2$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ alors $a = \frac{p+1}{2}$ et $b = \frac{p-1}{2}$.
2. Réciproquement, montrer que les entiers a et b définis comme précédemment sont des réponses au problème.

2 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n .

1. Calculer $S(6)$ et $S(7)$.
2. a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$ on a $S(n) \geq n + 1$.
b) Pour quels entiers a-t-on l'égalité $S(n) = n + 1$?
3. a) Démontrer que pour p, q premiers distincts $S(pq) = S(p)S(q)$.
b) Soit p premier et $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$S(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

4. Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, a-t-on $S(ab) = S(a)S(b)$? Justifier.