

DS1 - SpETS

$$\textcircled{I} \textcircled{1} A_m = n^3 + n^2 + n + 1 \\ = n^2(n+1) + n + 1$$

$$= (n+1)(n^2 + n + 1) \quad \text{donc } n+1 \text{ divise } A_m.$$

$$\textcircled{2} \text{ En prenant } m=10 \quad \text{on a } A_{10} = 1111$$

$$\text{Il admet donc pour diviseurs } 10+1=11 \text{ et } 10^2+10+1=101$$

$\textcircled{II}$ Soient a et b ces deux entiers.

$$\text{On a } a-b=399 \text{ et } a=15b+21 \text{ avec } 0 \leq 21 < b$$

$$\text{on a } a=399+b \text{ donc}$$

$$399+b=15b+21 \Rightarrow 14b=378 \Rightarrow b=27$$

$$\text{alors } a=15b+21 \\ = 426$$

Les deux entiers cherchés sont $a=426$ et $b=27$

$$\textcircled{III} (x,y) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } x^2 - 2xy = 15$$

$$\Leftrightarrow x(x-2y) = 15$$

donc x est un diviseur positif de 15 c-à-d $x \in \{1, 3, 5, 15\}$

$$\text{si } x=1; \quad 1-2y=15 \Rightarrow y=-7 \text{ refuse car } y \in \mathbb{N}$$

$$\text{si } x=3; \quad 3-2y=5 \Rightarrow y=-1 \text{ refuse car } y \in \mathbb{N}$$

$$\text{si } x=5; \quad 5-2y=3 \Rightarrow y=1$$

$$\text{si } x=15; \quad 15-2y=1 \Rightarrow y=7$$

$$\text{donc } S = \{(5, 1), (15, 7)\}$$

(IV)

$$\begin{array}{r} n^2 + 5n + 9 \\ n^2 + 2n \\ \hline 3n + 9 \\ 3n + 6 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} n+2 \\ n+3 \end{array}$$

On a donc $n^2 + 5n + 9 = (n+3)(n+2) + 3$

donc $n+2 \mid n^2 + 5n + 9$

$$\Leftrightarrow n+2 \mid (n+3)(n+2) + 3$$

$$\Leftrightarrow n+2 \mid 3 \text{ ou } n+2 \mid (n+3)(n+2)$$

donc $n+2$ est un diviseur de 3

c'est à dire $n+2 \in \{-3, -1, 1, 3\}$

donc $n \in \{-5, -3, -1, 1\}$

et comme $n \in \mathbb{N}$ il y a une seule valeur possible : $n=1$