# Devoir Mathématiques $N^o$ 7 (1h)

**1** Trois marques $X$, $Y$, $Z$ d'un dentifrice occupent un secteur de consommation.
Chaque mois les consommateurs de la population étudiée utilisent une et une seule de ces marques.
Soit $n$ un entier naturel. Pour un consommateur pris au hasard, on désigne par $X_n$, (respectivement $Y_n$, $Z_n$) l'événement : « La marque $X$ (respectivement $Y$ ou $Z$) est utilisée au cours du $n$-ième mois ». Les probabilités des événements $X_n$, $Y_n$ et $Z_n$, sont respectivement notées $x_n$, $y_n$ et $z_n$. Au cours du mois d'essai ($n = 0$), on a observé les valeurs initiales : $x_0 = 0{,}1$, $y_0 = 0{,}2$ et $z_0 = 0{,}7$.
D'autre part, par sondage, on a pu déterminer les intentions des consommateurs que l'on supposera constantes. La probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque $X$ au cours du mois $n$, d'adopter la marque $X$ (respectivement $Y$ ou $Z$) au cours du mois suivant est 0,4 (respectivement 0,3 et 0,3). La probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque $Y$ au cours du mois $n$, d'adopter la marque $X$ (respectivement $Y$ ou $Z$) au cours du mois suivant est 0,3 (respectivement 0,4 et 0,3). La probabilité, pour un consommateur ayant utilisé la marque $Z$ au cours du mois $n$, d'adopter la marque $X$ (respectivement $Y$ ou $Z$) au cours du mois suivant est 0,2 (respectivement 0,1 et 0,7).

## Partie A

1. Modéliser la situation par un graphe.
2. Déterminer la matrice $T$ de transition du système (dans l'ordre $X$, $Y$, $Z$). On note $L_n$ la matrice ligne donnant l'état du système le mois $n$.
3. Que vaut $L_0$, $L_1$, $L_2$ ?
4. Comment semble évoluer le système pour de grandes valeurs de $n$ ?

## Partie B

1. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $x_{n+1}$,$y_{n+1}$ et $z_{n+1}$ en fonction de $x_n$, $y_n$ et $z_n$.
2. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$
   Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a $U_{n+1} = AU_n + B$.
3. On désigne par $I$ la matrice identité de taille 2.
   a) Montrer que la matrice $I - A$ est inversible et déterminer son inverse.
   b) Déterminer la matrice $C$ telle que $C = AC + B$.
4. Pour tout entier naturel $n$, on pose $V_n = U_n - C$. Pour tout entier naturel $n$, démontrer que, $V_n = A^n V_0$.
5. a) On note $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   Calculer $D = P^{-1}AP$. En déduire que pour tout entier naturel $n$ :
   $$A^n = P \begin{pmatrix} 0{,}4^n & 0 \\ 0 & 0{,}1^n \end{pmatrix} P^{-1}$$
   b) Que peut-on dire des coefficients de la matrice $A^n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?
   c) Que conclure de l'utilisation, à long terme, des marques $X$, $Y$ et $Z$.
   d) Est-ce cohérent avec les résultats de la partie $A$ ?

**2** Lors d'une épidémie de grippe A en France, lea autorités sanitaires ont pu constater qu'un individu peut être :

- soit malade.
- soit immunisé car ayant déjà contracté une forme assez proche du virus.
- soit ni malade ni immunisé.

de plus d'une semaine à l'autre :

- une personne malade le sera encore avec une probabilité de 0,4 sinon elle est guérie et immunisée.
- une personne immusinsée a une probabilité de 0,1 de perdre cette immunisation donc de passer à l'état ni malade ni immunisé car le virus se transforme légèrement.
- une personne ni malade ni immunisée tombe malade avec une probabilité de 0,3.

La première semaine du mois de septembre 2009, le centre de veille sanitaire estme que 1% de la population est malade et 10% de la population est immunisée.

1. Dresser un graphe modélisant la situation.
2. On note $X_n = (m_n i_n r_n)$ la matrice donnant l'état du système $n$ semaines après la première observation où $m_n$, $i_n$, $r_n$ representent les proportions d'individus malades, immunisés ou ni l'un ni l'autre.
   Déterminer le vecteur lingne $X_0$, et la matrice de transition du système.
3. a) Faire un bilan sur la population les 6 premières semaines après la première observation.

   b)