Devoir Mathématiques N^o 5 (1h)

1

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.
   b) En déduire une solution particulière de l'équation (E).
   c) Résoudre l'équation (E).
   d) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.
   Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.
2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.
   b) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
   c) En déduire que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\ ;\ y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

2

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

- **Proposition 1 :** « Le reste de la division euclidienne de $2\,011^{2\,011}$ par 7 est 2 ».
- Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.
  Proposition 2 : « S'il existe un couple de nombres entiers relatifs $(u,\ v)$ tel que $ua + vb = 3$, alors $\text{PGCD}(a,\ b) = 3$ ».
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5.
  Proposition 3 : « L'entier $n^2 - 3n - 10$ n'est jamais un nombre premier ».