DS 5 - 4^{e} Maths

I ① ⓐ $11 \wedge 7 = 1$ donc d'après le th de Bezout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $11u - 7v = 1$.

On a $11 \times 2 - 7 \times 3 = 1$ donc $(2;3)$ solution évidente

ⓑ par produit par 5 on obtient $11 \times 10 - 7 \times 15 = 5$

ainsi $(10;15)$ solut° particulière de (E)

ⓒ On a alors si (x,y) solut° de (E) :

$$\begin{cases} 11x - 7y = 5 \\ 11 \times 10 - 7 \times 15 = 5 \end{cases}$$ et par différence $11(x-10) - 7(y-15) = 0$

donc $11(x-10) = 7(y-15)$ $(*)$

d'où $\left.\begin{array}{l} 11 \text{ divise } 7(y-15) \\ 11 \wedge 7 = 1 \end{array}\right\}$ donc d'après le th de Gauss $11 \mid y-15$

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 15 = 11k$

et en utilisant $(*)$ on déduit alors $11(x-10) = 7 \times 11k$

c.à.dire $x - 10 = 7k$.

il s'en suit que $\begin{cases} y = 15 + 11k \\ x = 10 + 7k \end{cases}$

Verifions les solut° : $11x - 7y = 11(10+7k) - 7(15+11k)$

$= 11 \times 10 - 7 \times 15$

$= 5$

donc on a $\boxed{S = \{(10+7k\,;\,15+11k)\,;\,k \in \mathbb{Z}\}}$

ⓓ Le problème équivaut à

$$\begin{cases} 11x - 7y = 5 \\ 0 \leq x \leq 50 \\ 0 \leq y \leq 50 \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) \in S \\ 0 \leq x \leq 50 \\ 0 \leq y \leq 50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10+7k \; ; \; y = 15+11k \; ; \; k \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq 10+7k \leq 50 \quad (L_2) \\ 0 \leq 15+11k \leq 50 \quad (L_3) \end{cases}$$

$(L_2) \Leftrightarrow \quad -10 \leq 7k \leq 40 \quad \Leftrightarrow \quad k \in \{-1; \ldots\ldots 5\}$

$(L_3) \Leftrightarrow \quad 0 \leq 15+11k \leq 50 \quad \Leftrightarrow \quad -15 \leq 11k \leq 35 \Leftrightarrow k \in \{-1; 0, \ldots 3\}$

Donc finalement les seules valeurs de k possibles sont $\{-1; 0; 1; 2; 3\}$

Il y a donc 5 valeurs possibles de k et donc 5 points à coordonnées entières appartenant à $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

② ⓐ (F) $11x^2 - 7y^2 = 5$

$\Rightarrow x^2 - 2y^2 \equiv 0 \,(5)$ car $11 \equiv 1 (5)$; $7 \equiv 2 (5)$ et $5 \equiv 0 (5)$

$\Leftrightarrow x^2 \equiv 2y^2 \quad (5)$

ⓑ par compatibilité de la congruence avec la puissance et le produit on a le tableau suivant.

$x \equiv ?$ (5)	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv ?$ (5)	0	1	4	4	1
$y \equiv$ (5)	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv$ (5)	0	2	3	3	2

Les restes possibles de la division de x^2 par 5 sont 0, 1, 4

Les restes possibles de la division de $2y^2$ par 5 sont 0, 2, 3.

ⓒ Soit $(x; y)$ un couple de solut° de (F) alors d'après ②ⓐ $x^2 \equiv 2y^2 \,(5)$

donc d'après le tableau du ②ⓑ $x \equiv 0 \,(5)$ et $y \equiv 0 \,(5)$

d'où x, y multiples de 5.

③ Montrons que (x, y) multiples de 5 $\Rightarrow (x, y)$ n'est pas solut° de (F).

Par l'absurde : supposons $x = 5x'$; $y = 5y'$ $\quad x', y' \in \mathbb{Z}$ avec (x, y) solut° de (F)

alors $\quad 11(5x')^2 - 7(5y')^2 = 5$

d'où $11 \times 5x' - 7 \times 5y' = 1$

et donc d'après le th de Bezout $11 \times 5 \wedge 7 \times 5 = 1$ ce qui est absurde.

finalement on déduit qu'un couple de multiples de 5 ne peut pas être solution de (F).

Conclusion : d'après 2(c) ; (x,y) solut° de (F) $\Longrightarrow$ x, y multiples de 5.

d'après ③ ; x, y multiples de 5 $\Longrightarrow$ (x,y) n'est pas solut° de (F)

On déduit alors que (F) n'a pas de solutions.

II ① $2011 = 287 \times 7 + 2 \equiv 2\ (7)$

$2 \equiv 2\ (7)$

$2^2 \equiv 4\ (7)$

$2^3 \equiv 8 \equiv 1\ (7)$ et $2011 \equiv 2+1+1 \equiv 1\ (3)$

d'où $2011 = 3k+1$ $k \in \mathbb{N}$ ainsi $2011^{2011} \equiv 2^{3k+1}\ (7)$

$\equiv (2^3)^k \times 2\ (7)$

$\equiv 2\ (7)$

d'où la proposit° ① est vraie.

② $3 - 2 = 1$

d'où $3 \times 3 - 2 \times 3 = 3$ et pourtant $2 \wedge 3 = 1$ (et pas 3)

d'où la proposit° ② est fausse.

③ $N = n^2 + 3n - 10 = (n-5)(n+2)$

si $n = 5$ $N = 0$ n'est pas premier

si $n = 6$ $N = 8$ n'est pas premier

et pour $n \geqslant 7$; $n - 5 \geqslant 2$; $n + 2 \geqslant 2$ d'où N est composé donc N non premier.