Devoir Mathématiques N^o 3 (1h)

1 Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

1. Vérifier que $10^3 \equiv -1(\text{modulo } 7)$.
2. En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

2 Résoudre dans $\mathbb{Z}$

$$8n^2 - 9n + 19 \equiv 0 \quad (6)$$

3 Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$ et $n = 2^\alpha 3^\beta$. On sait que le nombre de diviseurs positifs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs positifs de n.

1. Quel est le nombre de diviseurs positifs de n ?
2. Donner une formule pour le nombre de diviseurs positifs de n^2 ?
3. En déduire que
$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$$
4. En déduire les valeurs possibles de n.

4 On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

1. a) Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :
$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

   b) Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :
$$N_2 = 1\,131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. a) Démontrer que $N \equiv a_0 \quad (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

   b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.
3. a) Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

   b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.
4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.