DS 6 - spécialité.

① $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N^2 = O.$

donc $A^2 = (-3I + N)^2$

$= +9I^2 - 6I.N + N^2$ car I et N commutent

$= 9I - 6N$

③ Soit P_k la propriété $A^k = (-3)^k I + k(-3)^{k-1} N$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$; P_k est vraie.

Initialisat°: pour $k = 0$. $A^0 = I$

$\cdot\ (-3)^k I + k(-3)^{k-1} N = I + 0 = I$

donc P_0 est vraie

Hérédité: Soit $q \in \mathbb{N}$; supposons P_q vraie et montrons P_{q+1} vraie

P_q vraie donc $A^q = (-3)^q I + q(-3)^{q-1} N$

$\Rightarrow A^{q+1} = A((-3)^q I + q(-3)^{q-1} N)$ car P_q vraie

$= (N - 3I)((-3)^q I + q(-3)^{q-1} N)$

$= (-3)^q N + \underbrace{q(-3)^{q-1} N^2}_{=0} + (-3)^{q+1} I + q(-3)^q N$

$= (-3)^{q+1} I + (1+q)(-3)^q N$

et donc P_{q+1} est vraie

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}$ $\boxed{A^k = (-3)^k I + k(-3)^{k-1} N.}$