Devoir de Spécialité Mathématiques N^o 5 (1 heure)

1 *Les cinq questions sont indépendantes.*
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification complète sera valorisée.

Question 1
On considère l'équation (E) : $2x + 11y = 7$, où x et y sont des entiers relatifs.
Affirmation
Les seuls couples solutions de (E) sont les couples $(22k - 2\ ;\ -4k + 1)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Question 2
On considère l'entier $N = 11^{2\,011}$.
Affirmation
L'entier N est congru à 4 modulo 7.

Question 3
a et b sont deux entiers relatifs quelconques, n et p sont deux entiers naturels premiers entre eux.
Affirmation
$a \equiv b\ (p)$ si et seulement si $na \equiv nb\ (p)$.
Question 4 *Affirmation :* Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et de $4n + 3$ est égal à 7.
Question 5 Soient a et b deux entiers naturels.
Affirmation : S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 2$ alors le PGCD de a et b est égal à 2.

2

1. On considère l'ensemble $\mathrm{A}_7 = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$
   a) Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe 2 l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \quad (\text{modulo } 7)$.
   b) Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \quad (\text{modulo } 7)$ équivaut à $x \equiv 4 \quad (\text{modulo } 7)$.
   c) Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \quad (\text{modulo } 7)$ sont les multiples de 7.
2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $\mathrm{A}_p = \{1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ p - 1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.
   a) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \quad (\text{modulo } p)$.
   b) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $ax \equiv 1 \quad (\text{modulo } p)$.
   c) Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \quad (\text{modulo } p)$ si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p.
   d) Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 (\text{modulo} 31)$ et $3x \equiv 1 \quad (\text{modulo} 31)$. À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \quad (\text{modulo } 31)$.
