I ① L'affirmation est fausse.

en effet le couple $(9;-1)$ est solution car $2\times(9)+11\times(-1)=7$

mais pourtant $(9,-1)$ ne fait pas partie des solutions données car il n'existe pas $k\in\mathbb{Z}$ avec $\begin{cases} 9=22k-2 \\ -1=-4k+1 \end{cases}$

② $N = 11^{2011} \equiv 4^{2011}\ (7)$

et $4^2 = 16 \equiv 2\ (7)$

$4^3 \equiv 8 \equiv 1\ (7)$.

or $2011 = 2010+1$ et 2010 multiple de 3 par critère $\Rightarrow 2010 = 3\times K$

d'où $N \equiv 4^{2011}\ (7)$

$\equiv 4^{3K+1} \equiv (4^3)^K \times 4 \equiv 4\ (7)$

L'affirmation est vraie

③ $a\equiv b\ (p) \Longrightarrow na \equiv nb\ (p)$ par compatibilité des congruences avec le produit.

Réciproquement, si $na \equiv nb\ (p)$

alors $n(a-b) = kp$ pour $k\in\mathbb{Z}$

d'où $n \mid kp$ et $n\wedge p = 1$ donc d'après le th de Gauss $n\mid k$

et donc il existe $k'\in\mathbb{Z}$ tel que $k=k'n$.

On déduit $n(a-b) = nk'p$ et donc $a-b = k'p$

$\Rightarrow a\equiv b\ (p)$.

L'affirmation est vraie

4) $4n+3 = 3n+4 + n-1$

d'où $(4n+3) \wedge (3n+4) = (3n+4) \wedge (n-1)$

et

$$\begin{array}{r|l} 3n+4 & n+1 \\ 3n+3 & 3 \\ \hline 7 & \end{array}$$

d'où $3n+4 = 3(n+1) + 7$

et donc $(3n+4) \wedge (n-1) = (n-1) \wedge 7$

finalement $(4n+3) \wedge (3n+4) = (n-1) \wedge 7$

et donc si $n-1$ multiple de 7 le pgcd vaut 7

donc si $n-1 \equiv 0\ (7)$, c.à.d $n \equiv 1\ (7)$ alors le PGCD vaut 7

L'affirmation est vraie.

5) L'affirmation est fausse.

En effet $3 \wedge 2 = 1$ donc il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$3u + 2v = 1$ d'après le th de Bezout

et par produit par 2 on déduit $3 \times 2u + 2 \times 2v = 2$

C'est-à-dire $3u' + 2v' = 2$

pourtant $3 \wedge 2 \neq 2$!!

II

1) a) On essaye (de tête) de trouver l'inverse de chaque élément de A_7.

a	1	2	3	4	5	6
y	1	4	5	2	3	6

Rq : Si 2 inverse de 4 alors $2 \times 4 \equiv 1\ (7)$ et donc on a 4 inverse de 2 !

b) $3x \equiv 5\ (7) \implies 5 \times 3x \equiv 5 \times 5\ (7)$ (par produit)

$\implies x \equiv 4\ (7)$.

Réciproquement si $x \equiv 4\ (7)$ alors par produit $3x \equiv 12\ (7)$

$\iff 3x \equiv 5\ (7)$

(c) $ax \equiv 0 \ (7)$

$\iff 7 \mid ax$ et $a \in A_7$ avec 7 premier donc $a \wedge 7 = 1$

donc $\left.\begin{array}{l} 7 \mid ax \\ 7 \wedge a = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Th de Gauss}} 7 \mid x$ d'où $x \equiv 0 \ (7)$

donc x multiple de 7.

Réciproquement si x multiple de 7, on a clairement $ax \equiv 0 \ (7)$

donc finalement $ax \equiv 0 \ (7) \iff x$ multiple de 7.

(2) (a) p est un nombre premier qui ne divise pas a car $a \in A_p = \{1, \dots p-1\}$

donc d'après le petit th de Fermat $a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$

d'où $a \times a^{p-2} \equiv 1 \ (p)$ c'est-à-dire a^{p-2} solution de l'éq $ax \equiv 1 \ (p)$

(b) La division euclidienne de a^{p-2} par p donne

$a^{p-2} = q \times p + r$ avec $0 \leq r < p$.

$0 \leq r < p \iff r \in A_p$ ainsi r est l'unique représentant dans A_p de a^{p-2}

c'est-à-dire $a^{p-2} \equiv r \ (p)$ et $r \in A_p$

on a $a \times r \equiv a \times a^{p-2} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$.

{ Voir la remarque en fin de devoir pour une autre rédaction.

(c) $xy \equiv 0 \ (p) \iff p \mid xy$

et comme p premier alors $p \mid x$ ou $p \mid y$

d'où $x \equiv 0 \ (p)$ ou $y \equiv 0 \ (p)$. La réciproque est évidente

(d) 31 premier.

$2x \equiv 1 \ (31)$ alors $x = 2^{29}$ est solut° dans $\mathbb{Z}$

et cherchons la solut° dans A_{31}, c.à.d le reste de la division de 2^{29} par 31

$2^5 = 32 \equiv 1 \ (31)$ d'où $2^{29} = (2^5)^5 \times 2^4 \equiv 16 \ (31)$

donc $2x \equiv 1 \ (31) \iff x \equiv 16 \ (31)$.

16 est l'unique solut° de $2x \equiv 1 \ (31)$ dans A_{31}

de même $3x \equiv 1\ (31)$ a pour solution dans $\mathbb{Z}$ $x = 3^{29}$

et $3^{29} \equiv 3^{3\times 9} \times 3^2 \equiv 27^9 \times 3^2 \equiv (-4)^9 \times 9\ (31)$

$$\equiv -2^{18} \times 9\ (31)$$
$$\equiv -2^{15} \times 2^3 \times 9\ (31)$$
$$\equiv -2 \times 36\ (31)$$
$$\equiv -10\ (31)$$
$$\equiv 21\ (31)$$

d'où 21 est l'unique solution de $3x \equiv 1\ (31)$ dans A_{31}

$6x^2 - 5x + 1 \equiv 0\ (31)$

Soit $P(x) = 6x^2 - 5x + 1$

$\Delta = 1$ d'où P admet pour racines $x = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3}$

donc P admet pour factorisation

$P(x) = 6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$ c.à.d $P(x) = (2x-1)(3x-1)$

d'où $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0\ (31) \iff (2x-1)(3x-1) \equiv 0\ (31)$

$\iff 2x - 1 \equiv 0\ (31)$ ou $3x - 1 \equiv 0\ (31)$

d'après 2c

$\iff x \equiv 16\ (31)$ ou $x \equiv 21\ (31)$

D'où $S = \{16 + 31k\ ;\ 21 + 31k\ ;\ (k \in \mathbb{Z})\}$.

Remarque : autre résolution pour 2b

1) Soit r le reste de la division de a^{p-2} par p, alors $a^{p-2} \equiv r\ (p)$

d'où $a \times r \equiv a \times a^{p-2} \equiv a^{p-1} \equiv 1\ (p) \implies r$ est solut°.

2) Montrons l'unicité : si $r, r' \in A_p$ avec r, r' solutions de l'éq.

alors $ar \equiv 1(p)$; $ar' \equiv 1(p) \implies a(r - r') \equiv 0(p)$ (par différence)

d'où $p \mid a(r-r')$ et $a \wedge p = 1 \implies p \mid r - r'$ mais $0 \leq r < p$; $0 < r' < p$

d'où $-p < r - r' < p$ et donc il faut $r - r' = 0$ donc $r = r'$ donc r unique !