

Devoir de Spécialité Mathématiques N° 4 (1 heure)

1

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
- Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u ; v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.
 - En déduire une solution particulière de l'équation (E).
 - Résoudre l'équation (E).
 - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x - 7y - 5 = 0$. On note \mathcal{C} l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que $0 \leq x \leq 50$ et $0 \leq y \leq 50$.
Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble \mathcal{C} et dont les coordonnées sont des nombres entiers.
2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
- Démontrer que si le couple $(x ; y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$.
 - Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

- En déduire que si le couple $(x ; y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.
3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x ; y)$ n'est pas solution de (F).
Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

2

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver une solution particulière dans \mathbb{Z}^2 de l'équation

$$47x - 27y = 1.$$
