Devoir de Spécialité Mathématiques N^o 3 (1 heure)

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$5x \equiv 40 \quad (3)$$

Exercice 2 :

Quel est le reste de la division de 1515^{1515} par 7 ?

Exercice 3 :

Soit $(a; b) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$. Soit $N = \overline{ababab}^{10}$. Montrer que N est divisible par 481.

Exercice 4 :

Déterminer les entiers naturels non nuls dont la division euclidienne par 23 donne un reste égal au carré du quotient.

Exercice 5 :

Déterminer b pour que $\overline{244}^b = 74$.

Exercice 6 :

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. En utilisant le reste de la division euclidienne de p par 4, montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice 7 :

On admet que 503 est premier.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_q^{\alpha_q}$ la décomposition de n en facteurs premiers. Montrer que n est un carré (c'est-à-dire il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $n = a^2$) si et seulement si α_i est pair pour tout $i = 1, \dots q$.
2. Donner la décomposition de 2012 en facteurs premiers.
3. Quel est le plus petit entier k qui multiplié par 2012 est un carré parfait. (c'est-à-dire il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $k \times 2012 = a^2$).

Exercice 8 :

Soit X un entier naturel.

1. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
2. On suppose qu'il existe $a; b \in \mathbb{N}$ tels que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.
3. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
