# DS 3 - Spé Maths

......

## I

$5x \equiv 40 \ (3)$

$\Longleftrightarrow 2x \equiv 1 \ (3)$

faisons un tableau de congruences :

| $x \equiv ?$ (3) | 0 | 1 | 2 |
| --- | --- | --- | --- |
| $2x \equiv ?$ (3) | 0 | 2 | 1 |

d'où $2x \equiv 1 \ (3) \Longleftrightarrow x \equiv 2 \ (3)$ donc $S = \{2+3k \, ; \, k \in \mathbb{Z}\}$

## II

$1515 = 216 \times 7 + 3$ d'où $1515 \equiv 3 \ (7)$

et $3^2 \equiv 2 \ (7)$

$3^3 \equiv 6 \equiv -1 \ (7) \Longrightarrow 3^6 \equiv 1 \ (7)$

d'où $1515^{1515} \equiv 3^{1515} \ (7)$

$\equiv 3^{252 \times 6 + 3} \ (7)$

$\equiv 3^3 \times (3^6)^{252} \ (7)$

$\equiv 6 \times 1 \ (7)$

d'où le reste de la division de $1515^{1515}$ par 7 est 6.

## III

$N = \overline{ababab}^{10}$

$= b + 10a + 100b + 1000 \cdot a + 10.000 b + 100.000 a$

$= b(1+100+10000) + 10a(1+100+10000) = (b+10a) 10101$

et $10101 = 21 \times 481$ d'où $481 | N$.

## IV

le problème équivaut à $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ n = 23q + r & 0 \leq r \leq 22 \\ r = q^2 \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ n = 23q + q^2 \\ 0 \leq q^2 \leq 22 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ n = 23q + q^2 \\ q \in \{0, 1, \dots 4\} \end{cases}$

Les valeurs possibles de $n$ sont donc : $n=0$ ; $n=24$ ; $n=30$ ; $n=78$ ; $n=108$

(V) $\overline{244}^{b} = 74$

$\iff 2b^2+4b+4=74 \iff 2b^2+4b=70$

$\iff b^2+2b-35=0$

$\Delta = 144$ d'où $b = \frac{-2+12}{2} = 5$ ou $\underbrace{b=-7}_{\text{refusée}}$

d'où $\overline{244}^{5} = 74$.

(VI) $p$ premier et $p \geq 5$

Si $p=4k$ alors $p$ composé donc impossible.

Si $p=4k+2$ alors il faut $k \geq 1$ (car $p \geq 5$) et donc $p = 2(\underbrace{2k+1}_{\geq 1})$

$\Rightarrow p$ composé donc impossible

Les seules écritures possibles de $p$ sont donc $p=4k+1$ ou $p=4k+3$

Si $p=4k+1$ alors $p^2-1 = (4k+1)^2-1$
$= 8k^2+8k = 8(k+k^2) \Rightarrow 8 \mid p^2-1$

Si $p=4k+3$ alors $p^2-1 = (4k+3)^2-1$
$= 8k^2+24k+8 = 8(k^2+3k+1) \Rightarrow 8 \mid p^2-1$

D'où finalement $p \geq 5$ et $p$ premier $\Rightarrow 8 \mid p^2-1$

(VII) (1) Montrons $n=a^2 \iff \alpha_1 \dots \alpha_q$ pairs.

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_q^{\alpha_q}$ la décomposit° en facteurs premiers de $n$

et $a = p_1^{\beta_1} \dots p_q^{\beta_q}$ la décomposit° en facteurs premiers de $a$

$n=a^2 \iff p_1^{\alpha_1} \dots p_q^{\alpha_q} = (p_1^{\beta_1} \dots p_q^{\beta_q})^2$

$\iff p_1^{\alpha_1} \dots p_q^{\alpha_q} = p_1^{2\beta_1} \times \dots \times p_q^{2\beta_q}$

et par unicité de la décomposit° en facteurs premiers $\alpha_1 = 2\beta_1 ; \dots \alpha_q = 2\beta_q$

d'où $\alpha_i$ pairs $\forall i = 1 \dots q$

(2) $2012 = 503 \times 2^2$

(3) $k \times 2012 = a^2$

$\Longleftrightarrow k \times 503 \times 2^2 = a^2$

et d'après ce qui précède le plus petit k pour que $k \times 503 \times 2^2$ soit un carré il faut que les puissances dans la décomposit° de $k \times 503 \times 2^2$ soient paires. Il suffit de prendre $k = 503$.

On a alors $503 \times 2012 = (2 \times 503)^2$
$= (1006)^2$

VIII (1)

| $X \equiv ?\ (9)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X^2 \equiv ?\ (9)$ | 0 | 1 | 4 | 0 | 7 | 7 | 0 | 4 | 1 |

(2) $a^2 - 250507 = b^2$ est un carré donc d'après le tableau précédent, les restes possibles de $a^2 - 250507$ modulo 9 sont 0 ; 1 ; 4 et 7.

c'est donc que $a^2 - 250507 \equiv 0\ (9)$ ou $a^2 - 250507 \equiv 1\ (9)$
ou $a^2 - 250507 \equiv 4\ (9)$
ou $a^2 - 250507 \equiv 7\ (9)$ } (*)

mais d'autre part $250507 = 9 \times 27834 + 1$
$\equiv 1\ (9)$

d'où avec (*) $a^2 \equiv 1\ (9)$ ou $a^2 \equiv 2\ (9)$ ou $a^2 \equiv 5\ (9)$ ou $a^2 \equiv 8\ (9)$

(3) D'après le tableau du (1) un carré ne peut être congru à 2, 5 ou 8

Donc $a^2 \equiv 1\ (9)$ et toujours d'après (1), ceci implique ~~$a \equiv 1\ (8)$~~

$a \equiv 1\ (9)$ ou $a \equiv 8\ (9)$.

Les restes possibles de a modulo 9 sont 1 ou 8.