Devoir de Spécialité Mathématiques N^o 5 (1 heure)

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'étudier une même configuration géométrique à l'aide de deux méthodes différentes.

I-A l'aide des nombres complexes, sur un cas particulier

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives 10 et 5i.
   a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et B en O.
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de s. On note Ω son centre.
   c) Déterminer le point $s \circ s(\text{B})$; en déduire la position du point Ω par rapport aux sommets du triangle ABO.
2. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x - 2y = 0$, puis A$'$ et B$'$ les points d'affixes respectives 8+4i et 2+i.
   a) Démontrer que les points A$'$ et B$'$ sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et de B sur la droite $\mathcal{D}$.
   b) Vérifier que $s(\text{B}') = \text{A}'$.
   c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $\left[\text{A}'\text{B}'\right]$.

II - A l'aide des propriétés géométriques des similitudes

OAB est un triangle rectangle en O tel que $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. On note encore s est la similitude directè telle que $s(\text{O}) = \text{A}$ et $s(\text{B}) = \text{O}$. Soit Ω son centre.
   a) Justifier le fait que l'angle de s est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.
   b) Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre [OA]. (On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB].)
   En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
2. On désigne par $\mathcal{D}$ une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB). On note A$'$ et B$'$ les projetés othogonaux respectifs des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$.
   a) Déterminer les images des droites (BB$'$) et $\mathcal{D}$ par la similitude s.
   b) Déterminer le point $s(\text{B}')$.
   c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A$'$B$'$]