

## Devoir de Spécialité Mathématiques N° 4 (1 heure)

---

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier  $4^n - 1$ , lorsque  $n$  est un entier naturel. On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si  $p$  est un nombre entier et  $a$  un entier naturel premier avec  $p$ , alors  $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  ».

**Partie A.** Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $4^n$  est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que  $4^{28} - 1$  est divisible par 29.
3. Pour  $1 \leq n \leq 4$ , déterminer le reste de la division de  $4^n$  par 17. En déduire que, pour tout entier  $k$ , le nombre  $4^{4k} - 1$  est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels  $n$  le nombre  $4^n - 1$  est-il divisible par 5?
5. À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de  $4^{28} - 1$ .

**Partie B.** Divisibilité par un nombre premier

Soit  $p$  un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ .
2. Soit  $n \geq 1$  un entier naturel tel que  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ . On note  $b$  le plus petit entier strictement positif tel que  $4^b \equiv 1 \pmod{p}$  et  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $b$ .
  - a) Démontrer que  $4^r \equiv 1 \pmod{p}$ . En déduire que  $r = 0$ .
  - b) Prouver l'équivalence :  $4^n - 1$  est divisible par  $p$  si et seulement si  $n$  est multiple de  $b$ .
  - c) En déduire que  $b$  divise  $p - 1$ .

## Devoir de Spécialité Mathématiques N° 4 (1 heure)

---

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier  $4^n - 1$ , lorsque  $n$  est un entier naturel. On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si  $p$  est un nombre entier et  $a$  un entier naturel premier avec  $p$ , alors  $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  ».

**Partie A.** Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $4^n$  est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que  $4^{28} - 1$  est divisible par 29.
3. Pour  $1 \leq n \leq 4$ , déterminer le reste de la division de  $4^n$  par 17. En déduire que, pour tout entier  $k$ , le nombre  $4^{4k} - 1$  est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels  $n$  le nombre  $4^n - 1$  est-il divisible par 5?
5. À l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de  $4^{28} - 1$ .

**Partie B.** Divisibilité par un nombre premier

Soit  $p$  un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ .
2. Soit  $n \geq 1$  un entier naturel tel que  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ . On note  $b$  le plus petit entier strictement positif tel que  $4^b \equiv 1 \pmod{p}$  et  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $b$ .
  - a) Démontrer que  $4^r \equiv 1 \pmod{p}$ . En déduire que  $r = 0$ .
  - b) Prouver l'équivalence :  $4^n - 1$  est divisible par  $p$  si et seulement si  $n$  est multiple de  $b$ .
  - c) En déduire que  $b$  divise  $p - 1$ .