Devoir de Spécialité Mathématiques N^o 3 (1 heure)

Exercice 1 (5 points) :

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la droite Δ d'équation $8x+9y=300$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $M\in\Delta$ avec $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$.
2. En déduire l'ensemble des points $M(x;y)\in\Delta$ avec $(x;y)\in\mathbb{N}^2$.

Exercice 2 (15 points) :

1. a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.
   b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
   c) En déduire que $6^{40}\equiv 1\ (11)$ et que $6^{40}\equiv 1\ (5)$.
   d) Démontrer que $6^{40}-1$ est divisible par 55.
2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
   a) Montrer que l'équation
   $$(E)\ :\ 65x-40y=1$$
   n'a pas de solution.
   b) Montrer que l'équation
   $$(E')\ :\ 17x-40y=1$$
   admet au moins une solution.
   c) Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').
   d) Résoudre l'équation (E').
   En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que :
   $$17x_0\equiv 1\quad(40)$$
3. Pour tout entier naturel a, démontrer que :
$$\text{Si}\quad\begin{cases}a^{17}\equiv b & (55)\\ a^{40}\equiv 1 & (55)\end{cases}\qquad\text{alors}\quad b^{33}\equiv a\quad(55)$$
