

① On cherche $x, y \in \mathbb{Z}$ tq $8x + 9y = 300$. (E)

On a $8x(-1) + 9x1 = 1$

donc $8x(-300) + 9x300 = 300$ d'où une solut^o particulière de (E)

et par différence avec (E) on a

$$8(x+300) + 9(y-300) = 0.$$

d'où $8(x+300) = -9(y-300)$ (*)

donc $\left. \begin{array}{l} 8 \text{ divise } 9 \times (y-300) \\ 8 \cap 9 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{d'après le th de Gauss}$
 $8 \text{ divise } y-300$

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel $y-300 = 8k$

on reporte dans (*) on a alors $8(x+300) = -9 \times 8k$

$$\Rightarrow x+300 = -9k,$$

donc finalement $\begin{cases} x = -9k - 300 \\ y = 8k + 300 \end{cases}$

Vérifions que (x, y) solution de (E).

on a $8x + 9y = 8(-9k - 300) + 9(8k + 300)$
 $= -8 \times 300 + 9 \times 300$
 $= 300$

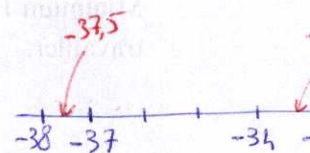
Donc les solutions du problème sont les points M ayant pour coordonnées $(x, y) \in \{(-9k - 300, 8k + 300); k \in \mathbb{Z}\}$

② On veut de plus $x, y \in \mathbb{N}$

$$\text{d'où } \begin{cases} -9k+300 \geq 0 \\ 8k+300 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{avec } x = -9k+300, y = 8k+300)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9k \leq 300 \\ 8k \geq -300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq -\frac{100}{3} = -33\frac{1}{3} \\ k \geq -\frac{75}{2} = -37\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k \in \{-37, -36, -35, -34\}$$



Il y a donc 4 points de Δ tels que $(x, y) \in \mathbb{N}^2$:

$$\{H(6, 28); H(15, 20); H(24, 12); H(33, 4)\}$$

II a) $6^2 \equiv 36 \equiv 3 \pmod{11}$

$$\Rightarrow 6^4 \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{11} \quad (\text{par compatibilité des congruences avec la p.})$$

$$\Rightarrow 6^5 \equiv 54 \equiv -1 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 6^{10} \equiv +1 \pmod{11} \quad (\text{En élevant au carré}).$$

donc le reste de la division de 6^{10} par 11 est +1.

b)

$$6 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 6^4 \equiv 1 \pmod{5} \quad \text{donc le reste de la division de } 6^4 \text{ par 5 est 1.}$$

c) $6^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ d'où $(6^{10})^4 \equiv 1^4 \pmod{11}$

$$\text{c'est-à-dire } 6^{40} \equiv 1 \pmod{11}.$$

$$6^5 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow (6^5)^8 \equiv 1^8 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 6^{40} \equiv 1 \pmod{5}.$$

d) d'après

$$\begin{cases} 11 \text{ divise } 6^{40} - 1 \\ 5 \text{ divise } 6^{40} - 1 \\ 5 \wedge 11 = 1 \end{cases} \Rightarrow 5 \times 11 \text{ divise } 6^{40} - 1.$$

② a) Supposons que x, y solution de l'équation (E),

alors d'après le th de Bézout $65 \wedge 40 = 1$,

or $5 \mid 65$ et $5 \mid 40$ d'où $\text{PGCD}(65, 40) \geq 5$ donc $65 \wedge 40 \neq 1$

Absurde !

D'où (E) n'admet pas de solution.

b) $40 = 2^3 \times 5$; 17 est un nombre premier

donc $17 \wedge 40 = 1$ d'où d'après le th de Bézout il existe $u, v \in \mathbb{Z}$

tels que $17u + 40v = 1$ donc (E') admet des solut^o.

c) Utilisons l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de (E').

$$40 = 2 \times 17 + 6$$

$$17 = 2 \times 6 + 5$$

$$6 = 5 + 1$$

$$\text{Donc } 1 = 6 - 5$$

$$= 6 - (17 - 2 \times 6)$$

$$= 3 \times 6 - 17$$

$$= 3 \times (40 - 2 \times 17) - 17$$

$$= 3 \times 40 - 7 \times 17$$

Donc le couple $(-7, 3)$ solution de (E)

$$d) \text{ On a } (-7) \times 17 - (-3) \times 40 = 1$$

$$\text{et (E') : } x \times 17 - y \times 40 = 1$$

$$\text{Donc par différence } 17(-7-x) - 40(-3-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 17(7+x) = 40(3+y) \quad (*)$$

$$\text{Donc } 17 \mid 40(3+y).$$

$$17 \wedge 40 = 1 \text{ (d'après 2b)} \} \Rightarrow \text{d'après le th de Gauss } 17 \mid 3+y$$

$$\text{Donc il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tq } 3+y = 17k.$$

En reportant dans (*) $17(7+x) = 40 \times 17k$ donc $7+x = 40k$

donc finalement
$$\begin{cases} x = 40k - 7 \\ y = 17k - 3 \end{cases}$$

Vérifions que (x, y) solution de (E') .

$$\begin{aligned} 17x - 40y &= 17(40k - 7) - 40(17k - 3) \\ &= 17(-7) - 40(-3) = 1 \end{aligned}$$

Donc les solutions de (E') sont $S = \{(40k - 7, 17k - 3); k \in \mathbb{Z}\}$

Cherchons les solutions de (E') tq $0 \leq x \leq 40$.

On a $x = 40k - 7; y = 17k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{et } 0 \leq x \leq 40 &\Leftrightarrow 0 \leq 40k - 7 \leq 40 \\ &\Leftrightarrow 7 \leq 40k \leq 47 \\ &\Leftrightarrow k = 1 \end{aligned}$$

Remarque:

$$17x \equiv 1 \pmod{40}$$

$$\Leftrightarrow 17x - 40k = 1 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (x, k) \text{ solution de } E'$$

Donc l'unique solution de (E') avec $0 \leq x \leq 40$ est le couple (x_0, y_0) correspondant à $k = 1$; c'est-à-dire $x_0 = 33; y_0 = 14$

On a alors $17x_0 - 40 \times 14 = 1$ donc $17x_0 = 1 + 14 \times 40$.

$$\text{d'où } 17x_0 \equiv 1 \pmod{40}.$$

③ $a^{17} \equiv b \pmod{55}$ et $a^{40} \equiv 1 \pmod{55}$.

$$a^{17} \equiv b \pmod{55} \Rightarrow (a^{17})^{33} \equiv b^{33} \pmod{55}$$

$$\Rightarrow a^{17 \times 33} \equiv b^{33} \pmod{55}$$

mais d'après ② $17 \times 33 = 1 + 14 \times 40$ donc $b^{33} \equiv a^{1+14 \times 40} \pmod{55}$

$$\equiv a^1 \times (a^{40})^{14} \equiv a^1 \equiv a \pmod{55}$$