

## Devoir de Spécialité Mathématiques (1 heure)

---

### Exercice

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère la transformation du plan qui à tout point d'affixe  $z$  associe le point d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = 2iz + 1$ .

**Proposition 1 :** « Cette transformation est la similitude directe de centre A d'affixe  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de rapport 2 ».

2. Dans l'espace muni du repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on note  $S$  la surface d'équation  $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$ .

**Proposition 2 :** « La section de  $S$  avec le plan d'équation  $z = 5$  est un cercle de centre A de coordonnées  $(-1; 0; 5)$  et de rayon 5 ».

3. **Proposition 3 :** «  $5^{750} - 1$  est un multiple de 7 ».

4. **Proposition 4 :** « Si un entier naturel  $n$  est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de  $3n + 4$  et de  $4n + 3$  est égal à 7 ».

5. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels.

**Proposition 5 :** « S'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = 2$  alors le PGCD de  $a$  et  $b$  est égal à 2 ».

6. **Proposition 6 :** « Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $n$  et  $2n + 1$  sont premiers entre eux. »

7. Soit  $x$  un entier relatif.

**Proposition 7 :** «  $x^2 + x + 3 = 0$  (modulo 5) si et seulement si  $x \equiv 1$  (modulo 5). »

8. Soit  $N$  un entier naturel dont l'écriture en base 10 est  $\overline{aba7}$ .

**Proposition 8 :** « Si  $N$  est divisible par 7 alors  $a + b$  est divisible par 7. »

9. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

**Proposition 9 :** « La similitude directe de rapport 2, d'angle  $\frac{\pi}{6}$  et de centre le point d'affixe  $1 - i$  a pour écriture complexe  $z' = (\sqrt{3} + i)z + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$ . »

10. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère un point A. On désigne par  $a$  son affixe. On note  $s$  la réflexion d'axe  $(O; \vec{u})$  et  $s_A$  la symétrie centrale de centre A.

**Proposition 10 :** « L'ensemble des nombres complexes  $a$  tels que  $s \circ s_A = s_A \circ s$  est l'ensemble des nombres réels. »