DS spécialité

20 mai 20

① soit f d'écriture complexe $z' = 2iz + 1$

par th, f est une similitude directe de rapport $|2i| = 2$ et d'angle $\arg(2i) = +\frac{\pi}{2}$

son centre est le pt fixe $\Omega(\omega)$.

on a $\quad \omega = 2i\omega + 1 \iff \omega = \dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1+2i}{5} \quad$ d'où $\Omega = A$

La proposit° 1 est vraie.

② $S : z = x^2 + 2x + y^2 + 1$

Soit $P : z = 5$ $\quad$ alors $\quad S \cap P : \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 1 = 5 \\ z = 5 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 5 \\ z = 5 \end{cases}$$

Ceci est l'équation d'un cercle de centre $A(-1;0;5)$; de rayon $\sqrt{5}$ dans le plan $z = 5$.

La proposition 2 est fausse.

③ $5^2 = 25 \equiv 4 \ (7)$

$5^3 \equiv 20 \equiv -1 \ (7) \implies 5^6 \equiv 1 \ (7)$

donc $5^{750} = 5^{600} \times 5^{120} \times 5^{30}$

$= (5^6)^{100} \times (5^6)^{20} \times (5^6)^5$ d'où par compatibilité des congruences avec puissance $5^{750} \equiv 1 \ (7)$

$\implies 7 \mid 5^{750} - 1$

La proposition 3 est vraie.

④ $4n + 3 = 3n + 4 + n - 1 \implies (4n+3) \cap (3n+4) = (3n+4) \cap (n-1)$

et $\begin{array}{r|l} 3n+4 & n-1 \\ \underline{3n-3} & 3 \\ 7 & \end{array}$ d'où $\quad 3n + 4 = 3(n-1) + 7$

$\implies (3n+4) \cap (n-1) = (n-1) \cap 7$

finalement $(4n+3) \cap (3n+4) = (n-1) \cap 7$

donc si $n \equiv 1 \ (7)$ alors $7 \mid n - 1 \implies \mathrm{PGCD}(4n+3, 3n+4) = 7$

La proposition 4 est vraie.

⑤ $4\times 2 - 3\times 2 = 2$ et pourtant $PGCD(4,3) = 1$

Donc la proposition ⑤ est fausse.

⑥ $2n+1 = 2\times n + 1$

$\overset{\text{ppté fondamentale}}{\Longrightarrow}$ $PGCD(2n+1\,;n) = PGCD(n,1) = 1$ (si $a = bq + r$ $pgcd(a,b) = pgcd(b,r)$)

La proposit° 6 est vraie.

Autre méthode : $\underset{u}{1}\times(2n+1) - \underbrace{2}_{v}\times n = 1$ donc th de Bezout montre $PGCD(2n+1\,;n) = 1$

⑦

$x \equiv \ (5)$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \ (5)$	0	1	4	4	1
$x^2+x+3 \equiv (5)$	3	0	4	0	3

Donc d'après le tableau de congruences $x^2+x+3 \equiv 0 \ (5)$

$\iff x \equiv 1 \ (5)$ ou $x \equiv 3 \ (5)$

La proposition ⑦ est fausse.

Rq. On peut directement exhiber un contre-exemple en prenant $x=3$:

pour $x=3$: $x^2+x+3 = 15 \equiv 0 (5)$ mais $3 \not\equiv 1 \ (5)$.

⑧ $N = \overline{aba7}^{10}$

$= a\times 10^3 + b\times 10^2 + a\times 10 + 7$

$\equiv a\times 3^3 + b3^2 + a\times 3 \ (7)$ car $10 \equiv 3 (7)$

$\equiv 27a + 9b + 3a \quad (7)$

$\equiv 2a + 2b \quad (7)$

donc $7 | N \iff 7 \mid 2(a+b)$

$\underset{\text{Gauss}}{\iff} 7 \mid (a+b)$

La proposition 8 est vraie.

⑨ s similitude directe de centre $A(1-i)$; rapport 2 et angle $+\frac{\pi}{6}$ s'écrit.

$$z' = 2e^{i\pi/6}(z-1+i) + 1-i$$

$$\iff z' = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\times\frac{1}{2}\right)(z-1+i) + 1-i$$

$$\iff z' = (\sqrt{3}+i)(z-1+i) + 1-i$$

$$\iff z' = (\sqrt{3}+i)z + (1-i)(1-\sqrt{3}-i)$$

$$\iff z' = (\sqrt{3}+i)z + \left(-\sqrt{3} + i(-1+\sqrt{3}-1)\right)$$

La proposition 9 est donc fausse.

Rq : on peut vérifier à la main si A est fixe :

A' a pour affixe $z' = (\sqrt{3}+i)(1-i) + \sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

$= \sqrt{3}+1+i-i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}+1+i(1-2i$

donc A non fixe donc écriture fausse !

⑩ La symétrie centrale de centre $A(a)$ a pour écriture complexe.

$$z' - a = e^{i\pi}(z-a) \iff z' = -z + 2a.$$

La reflexion d'axe $(O, \vec{u})$ a pour écriture : $z' = \bar{z}$.

$s \circ s_A$ a pour écriture $z' = -\bar{z} + 2\bar{a}$

$s_A \circ s$ a pour écriture $z' = -\bar{z} + 2a$.

$$s \circ s_A = s_A \circ s \iff \forall z \in \mathbb{C} \quad -\bar{z} + 2a = -\bar{z} + 2\bar{a}$$

$$\iff a = \bar{a}$$

$$\iff a \in \mathbb{R}$$

La proposition 10 est vraie.

Remarque : Méthode plus astucieuse :

si $s \circ s_A = s_A \circ s$ alors $s \circ s_A(A) = s_A \circ s(A) \iff s(A) = s_A(s(A))$

donc $s(A)$ invariant par s_A qui a pour point fixe A

donc $s(A) = A \Rightarrow A \in (O, \vec{u}) \Rightarrow a \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si $A \in (O, \vec{u})$, $s \circ s_A = s_A \circ s$.