Devoir de Spécialité Mathématiques N^o 3 (1 heure)

Exercice 1

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthonormal, dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$. On note $R_{a,b}$ ce réseau.
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A - Représentation graphique de quelques ensembles
Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe n° 1 à rendre avec la copie.
Représenter graphiquement les points $M(x\ ;\ y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2 \quad$ (modulo 3) et $y \equiv 1 \quad$ (modulo 3), sur le graphique 1 de la feuille annexe
2. $x + y \equiv 1 \quad$ (modulo 3), sur le graphique 2 de la feuille annexe ;
3. $x \equiv y \quad$ (modulo 3), sur le graphique 3 de la feuille annexe.

B - Résolution d'une équation
On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ solution de l'équation (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x\ ;\ y)$ pour laquelle le point $M(x\ ;\ y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.
Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale $[\mathrm{O}A]$ du réseau $R_{a,\ b}$, avec $\mathrm{O}(0\ ;\ 0)$ et $A(a\ ;\ b)$.

1. Démontrer que les points du segment $[\mathrm{O}A]$ sont caractérisés par les conditions :
$$0 \leqslant x \leqslant a\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant b\ ;\ ay = bx.$$
2. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment $[\mathrm{O}A]$ appartenant au réseau $R_{a,\ b}$.
3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[\mathrm{O}A]$ contient au moins un autre point du réseau.
(On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)

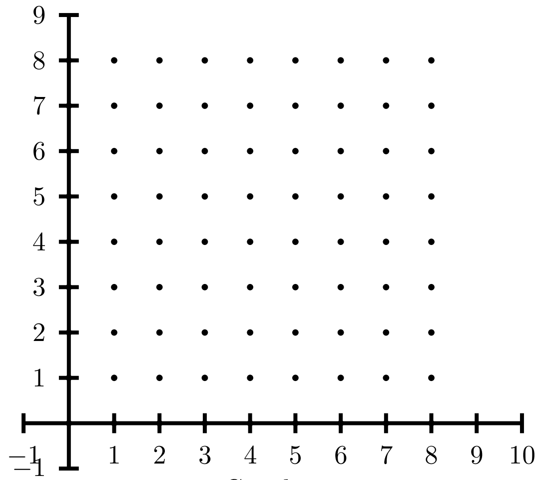
Exercice 2

On considère le système suivant où a et b sont des entiers naturels.

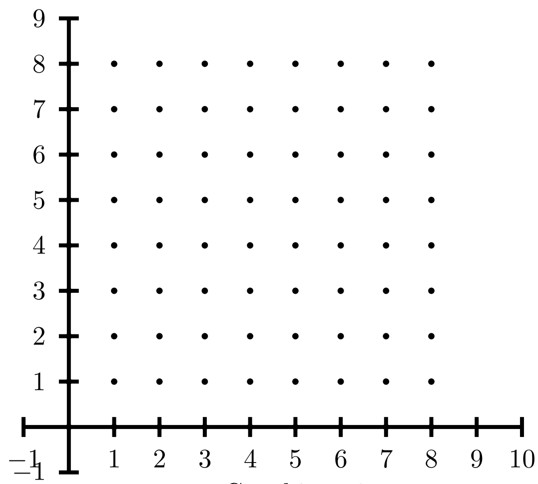
$$(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4\ 625 \\ \text{ppcm}(a\ ;\ b) = 440 \end{cases}$$

1. Montrer que si $(a,\ b)$ est solution de (1) alors pgcd$(a\ ;\ b)$ est égal à 1 ou 5.
2. Conclure

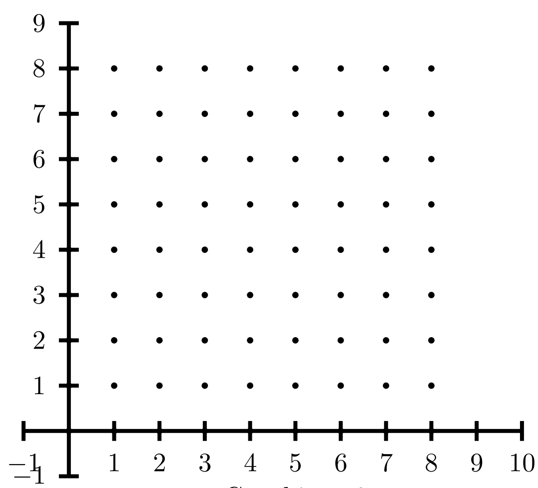
Annexe 1 - exercice 1



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3