3 fev 20

Devoir de spécialité N° 3

I A ① $\begin{cases} x \equiv 2\ (3) \\ y \equiv 1\ (3) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2+3k,\ k\in\mathbb{Z} \\ y = 1+3k',\ k'\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Ce sont 2 éqs de droites et il suffit de prendre les in

② $x+y \equiv 1\ (3) \iff y = 1-x+3k,\ k\in\mathbb{Z}$

il suffit de prendre les pts de coordonnées entières sur cette d

③ $x \equiv y\ (3) \iff y = x+3k\quad k\in\mathbb{Z}$ et de m̂ qu'au ②.

B ① $7x-4y=1$ (E)

On a $7\times 3 - 4\times 5 = 21-20 = 1$ d'où $(3;5)$ solut° particulière de (E)

② $\left.\begin{array}{l} 7x-4y=1 \\ 7\times 3-4\times 5=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ par différence $7(x-3)-4(y-5)=0$

$\Rightarrow 7(x-3) = 4(y-5)\qquad (*)$

d'où $\left.\begin{array}{l} 7 \mid 4(y-5) \\ 7\wedge 4 = 1 \text{ (car 7 premier)} \end{array}\right\} \Rightarrow$ d'après le th de Gauss $7 \mid y-5$

d'où $y-5 = 7k$ pour $k\in\mathbb{Z}$

on déduit donc avec $(*)$ que $x-3=4k$.

Vérifions alors que $x = 4k+3$; $y = 7k+5$; $k\in\mathbb{Z}$ est solut° de (E)

$7x-4y = 7(4k+3)-4(7k+5)$
$= 21-20 = 1$

d'où $S = \{(4k+3;\ 7k+5);\ k\in\mathbb{Z}\}$

③ $R_{4,7} = \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ avec $0\leq x\leq 4;\ 0\leq y\leq 7\}$

Les couples solutions de (E) et du réseau $R_{4,7}$ sont ceux de $S\cap R_{4,7}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} x=4k+3 \\ y=7k+5 \\ 0\leq 4k+3\leq 4 \\ 0\leq 7k+5\leq 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x=4k+3\ ;\ y=7k+5 \\ -3\leq 4k\leq 1 \\ -5\leq 7k\leq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=4k+3\ ;\ y=7k+5 \\ k=0 \end{cases}$

$(3;5)$ est donc l'unique couple de $S\cap R_{4,7}$.

C ① La diagonale du réseau est la droite (OA). Cette droite a pour équation $y=mx$ et $A(a,b)\in(OA) \Rightarrow b = ma \Rightarrow m=\frac{b}{a}$ d'où $(OA) : y = \frac{b}{a}x$

donc $(OA) : ay - bx = 0$.

Finalement $(x,y)\in R_{a,b}\cap(OA) \iff \begin{cases} x,y\in\mathbb{N}. \\ 0\leq x\leq a\ ;\ 0\leq y\leq b \\ ay = bx. \end{cases}$

② Soit $(x,y) \in R_{a,b} \cap (OA)$ avec $a \wedge b = 1$

on a alors d'après ① $\begin{cases} ay = bx \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ d'après Gauss $a | x$ d'où il existe $k \in \mathbb{Z}$

tel que $x = ka$

on a alors $ay = bka \Rightarrow y = kb$

Les points de $R_{a,b} \cap (OA)$ ont pour coordonnées (ka, kb), $k \in \mathbb{Z}$

de plus $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b \Rightarrow 0 \leq ka \leq b$; $0 \leq kb \leq b$

d'où $k \in \{0, 1\}$ donc les seuls points de $R_{a,b} \cap (OA)$ sont $O(0,0)$ et $A(a,b)$

③ $a \wedge b = d \neq 1$ donc il existe a', b' tq $a = da'$, $b = db'$ avec $\begin{cases} 0 < a' < \\ 0 < b' < \end{cases}$

$A'(a', b') \in (OA)$ car
$$\begin{aligned} a y_{A'} &= ab' \\ &= da'b' \\ &= a'b \\ &= b x_{A'} \end{aligned}$$

d'où A' satisfait l'éq de (OA)

d'autre part $\left.\begin{matrix} 0 < a' < a \\ 0 < b' < b \end{matrix}\right\} \Rightarrow A' \in R_{a,b}$ et $A' \neq A$; $A' \neq O$.

Conclusion $A' \in (OA) \cap R_{a,b}$ avec $A' \notin \{O, A\}$.

(II) (1) $\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a,b) = 440. \end{cases}$

① Soit $d = \text{PGCD}(a,b)$; soit a' et b' tq $a = da'$; $b = db'$

on a alors $\text{ppcm}(a,b) = da'b'$

d'où (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} a' < b' \\ d^2(a'^2 + b'^2) = 4625 \quad (*) \\ da'b' = 440. \end{cases}$

On a
$$\begin{array}{r|l} 4625 & 5^2 \\ 185 & 5 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$
d'où $4625 = 5^3 \times 37$

Soit p un diviseur premier de d alors $p^2 | d^2$ et d'après $(*)$ $d^2 | 5^3 \times 37 \Rightarrow p^2 | 5^3 \times 37$

donc d'après la ppté de divisibilité $p = 1$ ou $p = 5$.

donc finalement, les seules valeurs possibles pour d sont $d = 1$ ou $d = 5$.

② Cas 1 : $d = 1$.

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ ab = 440 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ (a+b)^2 = 5505 \\ (a-b)^2 = 3745 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ |a+b| = \sqrt{5505} \notin \mathbb{N} \\ |a-b| = \sqrt{3745} \notin \mathbb{N} \end{cases}$

Donc n'a pas de solutions

Cas 2 : $d = 5$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} a' < b' \\ a'^2 + b'^2 = 185 \\ a'b' = 88 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a' < b' \\ (a'+b')^2 = 361 \\ (a'-b')^2 = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a' < b' \\ |a'+b'| = 19 \\ |b'-a'| = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a' < b' \\ a'+b' = 19 \text{ ou} \\ b'-a' = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a' < b' \\ b' = 11 \\ a' = 8 \end{cases}$

Donc $a' = 8$; $b' =$

Donc (1) admet co

unique soluti

$(40, 55)$