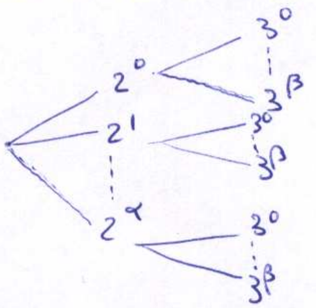
# Devoir de maths spécialité N°1

(I) la décomposition de $N$ ne contient que des 2 et des 3

donc $N$ s'écrit $N = 2^{\alpha}3^{\beta}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ ; $\beta \in \mathbb{N}$.

Les diviseurs de $2^{\alpha}3^{\beta}$ sont les entiers s'écrivant $2^i 3^j$ , $0 \leq i \leq \alpha$ ; $0 \leq j$




d'après l'arbre le nombre de diviseurs de $2^{\alpha}3^{\beta}$ valant $(\alpha+1)(\beta+1)$

Ainsi $N$ s'écrit $N = 2^{\alpha}3^{\beta}$ avec $(\alpha+1)(\beta+1) = 12$

donc $\alpha+1$ diviseur de 12 ;
si $\alpha+1 = 1$ alors $\beta+1 = 12$
si $\alpha+1 = 2$ —— $\beta+1 = 6$
si $\alpha+1 = 4$ —— $\beta+1 = 3$
si $\alpha+1 = 6$ —— $\beta+1 = 2$
si $\alpha+1 = 12$ —— $\beta+1 = 1$

ainsi les couples $(\alpha, \beta)$ solution sont $(0,11)$ ; $(1,5)$ ; $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,1)$, (
et les valeurs possibles de $N$ sont données par l'ensemble

$$S = \{ 3^{11} ; 2 \times 3^5 ; 2^3 3^4 ; 2^4 3^3 ; 2^5 \times 3 ; 2^{11} \}$$

(II) (1) $A_n = 4^{2n+3} + 1$.

Soit $P_n$ la propriété : $A_n$ est divisible par 5.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n$ est vraie.

Etape 1 : pour $n = 0$ ; $A_n = 4^3 + 1 = 65$ est divisible par 5 donc $(P_0)$ vr

Etape 2 : Soit $q \in \mathbb{N}$ et supposons $P_q$ vraie, montrons $P_{q+1}$ vraie.

$P_q$ vraie donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^{2q+3} + 1 = 5k$

on a
$$\begin{aligned} A_{q+1} &= 4^{2(q+1)+3} + 1 \\ &= 4^{2q+3} \times 4^2 + 1 \\ &= (5k - 1) \times 4^2 + 1 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 4^2 \times 5k - 15 = 5(4^2 k - 3) \end{aligned}$$

donc 5 divise $A_{q+1}$ $\Longrightarrow$ $P_{q+1}$ vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; 5 divise $A_n$.

② $A_n = 4^{2n+3} + 1$

$\equiv (-1)^{2n+3} + 1 \quad (5)$ (Compatibilité des congruences avec les puissanc

$\equiv \cancel{+}-1 + 1 \quad (5)$

$\equiv 0 \quad (5)$ donc $5 | A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

III

$$\begin{array}{r|l} 3n^2 + 15n + 19 & n+1 \\ 3n^2 + 3n & 3n + 12 \\ \hline 12n + 19 & \\ 12n + 12 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

donc $3n^2 + 15n + 19 = (3n+12)(n+1) +$

d'où $n+1 \mid 3n^2+15n+19$

$\iff n+1 \mid 7$ (par combinaison linéaire à coeffs enti

$\iff n+1 \in \{-7; -1; +1; 7\}$

$\iff n \in \{-8; -2; 0; 6\}$

on cherche $n \in \mathbb{N}$ donc l'ensemble des valeurs de $n$ est

$S = \{0; 6\}$.

IV On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} n = 26q + r & 0 \leq r < 26 \\ r = q^2 \end{cases}$

d'où $n = 26q + q^2$ avec $1 \leq q^2 < 26$ ($q \neq 0$ car $n \in \mathbb{N}^*$)

$\iff n = 26q + q^2$ avec $q \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Les valeurs possibles de $n$ sont donc $S = \{27; 56; 87; 120; 155$

V ①

$$\begin{array}{r|l} 17640 & 2 \times 5 \\ 1764 & 2 \\ 882 & 2 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7^2 \end{array}$$

donc $17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$

② $k^2$ multiple de $17640 \iff 17640$ divise $k^2$

$\iff$ les facteurs premiers de la décomposit° de 17640 se retrouv dans ceux de $k^2$ avec des puis inférieures.

$k$ et $k^2$ ayant les mêmes facteurs premiers, on déduit que $k$ s'écrit à l'aide des facteurs premiers de 17640

d'où $k = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta$

$\Rightarrow k^2 = 2^{2\alpha} 3^{2\beta} 5^{2\gamma} 7^{2\delta}$ et on doit choisir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ le plus petit possible mais tels que 17640 divise $k^2$; d'où $\alpha = 2$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$; $\delta = 1$

donc $k = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

(VI) $1789 \equiv 389 \equiv 39 \equiv 4 \ (7)$ (car $1789 = 1400 + 389$
$= 1400 + 350 + 39$
$= 1400 + 350 + 35 + 4$ )

d'où $1789^{1789} \equiv 4^{1789} \ (7)$.

et $4 \equiv 4 \ (7)$

$4^2 = 16 \equiv 2 \ (7)$

$4^3 = 8 \equiv +1 \ (7)$

et $1789 = 1788 + 1 = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

donc $1789^{1789} \equiv 4^{1789} \equiv 4^{3k+1} \equiv (4^3)^k \times 4 \equiv 4 \ (7)$

Le reste de la division de $1789^{1789}$ par 7 est 4.

(VII) $758 = 50b + r$ avec $0 \leq r < 50$

d'où $758 - r = 50b$

$\Leftrightarrow 750 + 8 - r = 50b \Leftrightarrow 8 - r = 50(b - 15)$

donc $8 - r$ multiple de 50 $\Leftrightarrow r - 8$ multiple de 50 avec $-8 \leq r - 8 \leq$

d'où $r - 8 = 0$ donc $r = 8$

on a alors $758 = 50b + 8 \Leftrightarrow 750 = 50b$ donc $b = 15$

Rq : C'est plus rapide avec les congruences :

$758 = 50b + r$ avec $0 \leq r < 50$

donc on a $8 \equiv r \ (50) \Rightarrow r = 8 \Rightarrow b = 15$.