Devoir de Mathématiques N^o 14 (45 minutes)

Exercice

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

1. (a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   (b) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 4\ ;\ -2)$.
   Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
   En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

   (a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

   (b) La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

   (a) Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.
   Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{I}G}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IC}}$.

   (b) Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.
   Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?