Devoir de Mathématiques N^o 13 (1 heure)

Exercice 1 :

Spécialistes

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Unité graphique : **4 cm**

Soit I, J, A, B les points d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{I}} = 1 \ , \ z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i} \ , \ z_{\mathrm{A}} = 2 \ , \ z_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2} + \mathrm{i} \ ,$$

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe : $z' = -\mathrm{i}\,\overline{z} + 2\mathrm{i}$.

1. Déterminer les images des points O, A, B par f.
2. (a) Est-ce une isométrie ?
   (b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   (c) La transformation f est-elle une symétrie axiale ?
3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.
4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.
   (a) Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = -\mathrm{i}\,\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.
   (b) Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.
   (c) En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.
5. Soit $\varphi = f \circ f$; déterminer l'écriture complexe de φ ainsi que ses éléments caractéristique.

Exercice 2 :

Obligatoire
La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.
Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\boldsymbol{\lambda = 0,2}$.
2. À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de $0,5$?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $\mathrm{e}^{-0,4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.
   Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.