

Devoir de Mathématiques N^o 13 (1 heure)

Exercice 1 :

Non spécialistes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

- Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z} = i$. Écrire la solution sous forme algébrique.
- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
- Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = 2, \quad b = 4, \quad a' = 2i \quad \text{et} \quad d = 2 + 2i.$$

Quelle est la nature du triangle ODB ?

- Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - i\sqrt{3}$ et $f = 1 + i\sqrt{3}$.
Quelle est la nature du quadrilatère $OEAF$?
- Soit \mathcal{C} le cercle de centre A et de rayon 2. Soit \mathcal{C}' le cercle de centre A' et de rayon 2.
Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$
 - On désigne par E' l'image par la rotation r du point E . Calculer l'affixe e' du point E' .
 - Démontrer que le point E' est un point du cercle \mathcal{C}' .
 - Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$. En déduire que les points E, E' et D sont alignés.
- Soit D' l'image du point D par la rotation r . Démontrer que le triangle $EE'D'$ est rectangle.

Exercice 2 :

Obligatoire

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec $\lambda > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

- Déterminer λ , arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.
Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.
- À quel instant t , à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?
- Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.
- Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
- On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante.
Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.