Devoir de Mathématiques N^o 12 (2 heures)

Exercice 1 (5 points) :

Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure, il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville, il lui en coûte 1,5 €.
Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'événement : « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. **Détermination d'une relation de récurrence**
   (a) Déterminer les probabilités conditionnelles : $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
   (b) Déterminer $P(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $P(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de q_n.
   (c) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et q_n.
   (d) En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$.
2. **Etude de p_n**
   Pour tout entier n non nul, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{-3}{20}$
   (b) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.
   (c) Justifier que (p_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 (6 points) :

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.
On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).
Un joueur fait une partie en deux étapes :
Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.
Deuxième étape :
• si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
• si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
• si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).
On définit les évènements suivants :
D_1 : « le dé indique 1 » D_2 : « le dé indique 2 »

D_3 : « le dé indique 3 » G : « la partie est gagnée ».
A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. (a) Déterminer sous forme fractionnaire les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$, et $p_{D_3}(G)$
   (b) Montrer alors que $p(G) = \frac{23}{180}$.
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.
3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
   Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 3 (5 points) :

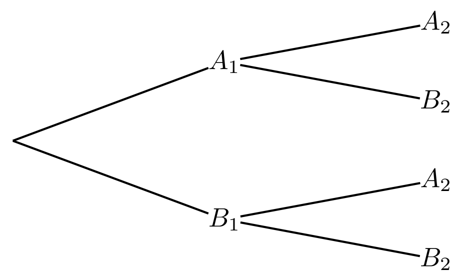
On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4)$, on note p_i la probabilité d'obtenr le nombre k sur laface cachée.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que $p_1 = 0,1,\ p_2 = 0,2,\ p_3 = 0,3$ et $p_4 = 0,4$

1. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?
2. On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   (a) Pour $1 \leqslant i \leqslant 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'évènement $(X = i)$.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geqslant 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.
3. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
   On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.

Exercice 4 (4 points) :

Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le fim B.
Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le fim A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :
A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1. Compléter l'arbre pondéré suivant. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2. Montrer alors que $p(A_2) = \dfrac{8}{11}$.
3. Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B.
   On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.