Devoir de Mathématiques

4 heures

(9 avril 2008)

Exercice 1 (5 points) Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.
   (b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,
   $$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
   $$F(x) = [\ln(x+3)]^2.$$
   (a) Justifier la dérivabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.
   (b) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Calculer I_n.
4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
   Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 2 (4 points) Commun à tous les candidats

On considère la fonction f, définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

1. (a) Justifier la continuité de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   (b) Montrer que f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. **Restitution organisée de connaissances**
   On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.
   Pour tout réel x_0 de $[1\ ;\ +\infty[$, on note $\mathcal{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.
   On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ est une primitive de f.

   (a) Que vaut $\mathcal{A}(1)$?

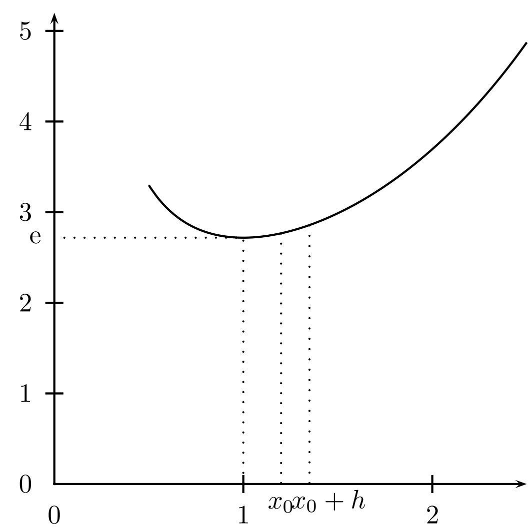
   (b) Soit x_0 un réel quelconque de $[1\ ;\ +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

   $$f(x_0) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h).$$

   (c) Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?

   (d) En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathcal{A}$.

   (e) Conclure.



Exercice 3 (6 points) Commun à tous les candidats
Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes.

Dans la questions 1, on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les événements suivants :
   - A : « Les trois boules sont rouges »
   - B : « Les trois boules sont de la même couleur »
   - C : « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

   (a) Calculer les probabilités $p(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

   (b) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2. Dans cette question, on remaplce 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
   On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.
   Soit les événements suivants :
   - D : « Tirer deux boules rouges »
   - E : « Tirer deux boules de la même couleur »

   (a) Montrer que la probabilité de l'événement D est $p(D) = \dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

   (b) Calculer la probabilité $P(E)$ de l'événement E en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \dfrac{1}{2}$.

3. Dans cette question, on tire successivement avec remise 10 boules dans l'urne de la question 1. On considère les événements suivants :
   - F : « Tirer au moins une boule jaune »
   - G : « Tirer exactement une boule jaune »
   - H : « Tirer deux boules rouges exactement »

   Quelle est la probabilté des événements F,G et H ?

Exercice 4 (5 points) $\boxed{\textbf{Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité}}$

$(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormal du plan $\mathcal{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.
Soit F l'application de $\mathcal{P}$ privé de O dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. (a) Soit E le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

   (b) On note $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathcal{C}_1$ par l'application F.

2. (a) Soit K le point d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F.
   Calculer l'affixe de K'.

   (b) Soit $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathcal{C}_2$ par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$. R appartient au cercle $\mathcal{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

   (a) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}^\star$, $z' + 1 = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$.
   En déduire que si $R(z) \in \mathscr{C}_3$ alors $|z' + 1| = |z'|$.

   (b) Si on considère maintenant les points d'affixe $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **a.**.

Exercice 5 (5 points) **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est rapportée à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra 1 cm, pour unité graphique. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right) z - 1 + \mathrm{i}\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$.

   Calculer $\Omega\mathrm{M}_0$ et donner une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}_0}\right)$.
3. On considère la suite de points $(M_n)_{n \geqslant 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du poini M_n.
   (a) Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
   (b) Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité :
   $$z_n - \mathrm{i} = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7n\pi}{6}} \left(z_0 - \mathrm{i}\right).$$
   (c) Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n, puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geqslant 10^2$.
4. (a) On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifiée que le couple $(-5\ ;\ -3)$ est solution, résoudre l'équation (E).
   (b) Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\mathrm{Im}(z) = 1$ et $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$.
   Caractériser géométriquement Δ et le représenter.
   Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. Préciser son plus petit élément.