Devoir de Mathématiques N^o 10 (1 heure)

Exercice 1 :

On considère la suite des intégrales suivantes : $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$, $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx, \ldots,$ $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}\,dx$, ...

1. (a) Calculer I_1.
   (b) Calculer $I_0 + I_1$ et en déduire I_0.
   (c) Pour tout entier n, calculer $A_n = \int_0^1 e^{nx}\,dx$, et en déduire $I_{n+1} + I_n$.
2. (a) Déterminer le sens de variation de (I_n).
   (b) Prouver que pour tout $x \in [0;1]$ on a

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$$

   (c) En déduire un encadrement de I_n.
   (d) En déduire la limite de (I_n).

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x+1).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité 3 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

1. On pose $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

   (b) En déduire I.
2. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question précédente, calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.