Devoir de Mathématiques N^o 9 (2 heures)

Le sujet est recto-verso. Les exercices peuvent être traités dans le désordre. Le barême est approximatif.

Exercice 1 (4 points) :

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Exercice 2 (6 points) :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 & = & 4 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1,\ v_1,\ u_2$ et v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   (b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).
3. Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.
   (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 3 (3 points) :

Soit (u_n), $n \in \mathbb{N}^\star$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_1^n e^{-x^2}\,dx$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.
3. En déduire que $u_n \leq \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis montrer qur (u_n) est convergente.

Exercice 4 (7 points) :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de u_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.
3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

4. (a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   (b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).