

Devoir n° 9 TS7 - 29 février 2008

① $u_n \neq 0 \forall n$ et $v_n = -\frac{2}{u_n}, n \in \mathbb{N}$.

② (u_n) Cvg $\Rightarrow (v_n)$ Cvg est Faux

En effet si (u_n) converge vers 0, par exemple $u_n = \frac{1}{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.

alors (v_n) diverge car $v_n = n+1; n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ ① est fausse.

③ $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ car $x \rightarrow \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow -\frac{2}{u_n} \geq -1$ (x(-2) avec $-2 < 0$)

Donc (v_n) minorée par $-1 \Rightarrow$ ② Vraie

③ $\forall n \in \mathbb{N}; v_{n+1} - v_n = -2\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)$

$= -2 \frac{(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}} = \frac{2(u_{n+1} - u_n)}{u_n u_{n+1}}$

Avec $u_n = \frac{1}{n+1}; n \in \mathbb{N}$ on a (u_n) décroissante donc $\frac{2(u_{n+1} - u_n)}{u_n u_{n+1}} \leq 0 \forall n \in \mathbb{N}$
et donc v_n décroissante donc ③ est fausse.

④ avec $u_n = (-1)^n; (u_n)$ est clairement divergente et $v_n = \frac{2}{(-1)^n} = -2(-1)^n \forall n \in \mathbb{N}$
Donc (v_n) divergente. $\Rightarrow$ ④ est fausse.

⑤ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$

① $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2}; v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \frac{15}{4}$

$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{29}{8}; v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{59}{16}$

② ② $\forall n \in \mathbb{N}; w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$
 $= \frac{(u_{n+1} + v_n - u_n - v_n)}{2}$
 $= \frac{u_{n+1} - u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{4}$
 $= \frac{1}{4} w_n$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de 1^{er} terme $w_0 = v_0 - u_0 = 1$

③ On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}; w_n = w_0 \cdot q^n$ d'où $w_n = \frac{1}{4^n}$.

$\left|\frac{1}{4}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$

$$\textcircled{3} \quad \forall m \in \mathbb{N}; \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2}$$

or $w_n \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ car (w_n) géométrique de raison $\frac{1}{2} > 0$ et $w_0 > 0$.

d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow (u_n) \uparrow$

$$\forall m \in \mathbb{N}; \quad v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{w_n}{4} \leq 0 \quad \text{d'où } (v_n) \downarrow$$

On a (v_n) décroissante; (u_n) croissante et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$

d'où (v_n) et (u_n) adjacentes. Donc (v_n) et (u_n) convergent vers une limite commune l .

$$\textcircled{4} \quad t_n = \frac{u_n + 2v_n}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{a} \quad \forall m \in \mathbb{N}; \quad t_{n+1} &= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + 2 \frac{u_{n+1} + v_n}{2}}{2} \\ &= \frac{1}{4} (u_n + 3v_n + u_n + v_n) = \frac{1}{4} (2u_n + 4v_n) \\ &= \frac{u_n + 2v_n}{2} = t_n. \end{aligned}$$

donc (t_n) est constante.

$$\textcircled{b} \quad (t_n) \text{ constante} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \quad t_n = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\text{donc } \forall m \in \mathbb{N}; \quad \frac{u_n + 2v_n}{2} = \frac{11}{2}$$

et sachant que (u_n) et (v_n) convergent vers l on déduit par passage à la limite

$$\frac{3l}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow l = \frac{11}{3};$$

(u_n) et (v_n) convergent vers $\frac{11}{3}$.

III $u_n = \int_1^m e^{-x^2} dx \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$

① $\forall m \in \mathbb{N}^*$; $u_{n+1} - u_n = \int_1^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_1^m e^{-x^2} dx$
 $= \int_m^{n+1} e^{-x^2} dx$ par linéarité de l'intégrale

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x^2} > 0$; la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$
 les bornes sont dans l'axe ($1 < n+1$)

donc d'après la thm de positivité $\int_m^{n+1} e^{-x^2} dx > 0$

on déduit donc que (u_n) est croissante.

② $\forall x \geq 1$ on a par produit par x ($x \geq 0$).

$x^2 \geq x$

$\Leftrightarrow -x^2 \leq -x$ ($\times (-1)$ avec $-1 < 0$).

$\Leftrightarrow \underline{e^{-x^2} \leq e^{-x}}$ car exp croissante sur $\mathbb{R}$.

③ Les fonctions $x \mapsto e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$; les bornes 1 et m sont dans l'axe ($1 < m$).

donc par intégration de l'inégalité on a $\int_1^m e^{-x^2} dx \leq \int_1^m e^{-x} dx$

et $\int_1^m e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^m = e^{-1} - e^{-m}$

d'où $\forall m \in \mathbb{N}^*$; $u_n \leq \frac{1}{e} - \frac{1}{e^m}$.

On déduit $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{1}{e}$ donc (u_n) est croissante et majorée

IV $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$ $\Rightarrow$ (u_n) converge.

① pour $n=1$ on a $u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t dt$.

soit $u(t) = 1-t$ et $v(t) = e^t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

u, v dérivables et $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = -1$; $v'(t) = e^t$

donc u, v, u', v' continues et par intégration par parties on a

$u_1 = [(1-t)e^t]_0^1 + \int_0^1 e^t dt = -1 + [e^t]_0^1 = e - 2$ donc $u_1 = e - 2$

② $\forall t \in [0, 1] ; 1-t \geq 0$

$$\Rightarrow (1-t)^n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

et par produit $(1-t)^n e^t \geq 0$ car $e^t \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

$t \mapsto (1-t)^n e^t$ continue sur $\mathbb{R}$; les bornes 0, 1 sont dans l'axe ($0 \leq 1$).

donc par intégration de l'inégalité on a $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \geq 0$.

d'où $u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

③ Soit $u(t) = (1-t)^{n+1}$ et $v(t) = e^t$ sur $\mathbb{R}$; pour $n \in \mathbb{N}^*$

alors u, v dérivables sur $\mathbb{R}$ et $u'(t) = (n+1)(1-t)^n \cdot (-1)$; $v'(t) = e^t$

donc u, v, u', v' sont continues et par intégration par parties on a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} &= \left[(1-t)^{n+1} e^t \right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)(1-t)^n e^t dt \\ &= -1 + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \end{aligned}$$

d'où $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

④ a) $\forall t \leq 1$ on a par passage à l'exponentielle (exp croissante sur $\mathbb{R}$).

d'où $e^t \leq e$

$$\Rightarrow \underline{(1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n} \quad (\times (1-t)^n \text{ avec } (1-t)^n \geq 0 \text{ d'après ②})$$

b) Les fonctions $t \mapsto (1-t)^n e^t$ et $t \mapsto e(1-t)^n$ sont continues sur $\mathbb{R}$
les bornes 0, 1 sont dans l'axe.

donc par intégration de l'inégalité on a $\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e dt$. (*)

$$\text{et } \int_0^1 (1-t)^n dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

donc (*) devient $u_n \leq \frac{e}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

⑤ on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+1} = 0$ d'où d'après le thm des gendarmes $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$