Bac Blanc

Mathématiques obligatoire

4 heures

(6 février 2008)

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)\left(2 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormal.

1. (a) Étudier la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
   (c) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ.
2. (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
   (b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
   (c) Préciser la valeur de $f'(0)$, donner alors une interprétation graphique puis établir le tableau de variations de f.
3. Démontrer que $f(x) = 3$ admet une solution unique α et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
4. Déterminer le point A de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ.

Exercice 2 (3 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{E}_0) : \quad y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Exercice 3 (2 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **Restitution organisée des connaissances**
   Pré-requis :
   – la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $(x \mapsto \dfrac{1}{x})$.
   – $\ln(1) = 0$
   Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x,
   $$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$
2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que
   $$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ et que } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$
   pour tous réels strictement positifs a et b.
3. On donne $0{,}69 \leqslant \ln 2 \leqslant 0{,}70$ et $1{,}09 \leqslant \ln 3 \leqslant 1{,}10$.
   En déduire l'encadrement de $\ln\left(\dfrac{3}{8}\right)$.

Exercice 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

1. (a) Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.
   (a) On a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $e \leq u_n \leq 5$.
   (c) Déterminer les variations de (u_n).
   (d) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[\mathrm{e}\ ;\ 5]$.
   (e) En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 5 (5 points)

Commun à tous les candidats

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, d'unité graphique 1 cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_{\text{A}} = \dfrac{3}{2} + 6\text{i}$, $z_{\text{B}} = \dfrac{3}{2} - 6\text{i}$; $z_{\text{C}} = -3 - \dfrac{1}{4}\text{i}$, $z_{\text{P}} = 3 + 2\text{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -1 + \dfrac{5}{2}\text{i}$.
   (a) Déterminer l'affixe z_{Q} du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\overrightarrow{w}$.
   (b) Déterminer l'affixe z_{R} du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.
   (c) Déterminer l'affixe z_{S} du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   Placer les points P, Q, R et S.
2. (a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
   (b) Calculer $\dfrac{z_{\text{R}} - z_{\text{Q}}}{z_{\text{P}} - z_{\text{Q}}}$.
   En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.
   (c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathcal{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.
3. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$?

Nom :

Annexe de l'exercice 1