

Bac Blanc
Mathématiques spécialité

4 heures

(6 février 2008)

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x}).$$

Soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans le repère orthonormal.

1. (a) Étudier la limite de f en $+\infty$.
(b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à \mathcal{C} .
(c) Étudier la position relative de \mathcal{C} et Δ .
2. (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$.
(b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
(c) Préciser la valeur de $f'(0)$, donner alors une interprétation graphique puis établir le tableau de variations de f .
3. Démontrer que $f(x) = 3$ admet une solution unique α et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
4. Déterminer le point A de \mathcal{C} où la tangente à \mathcal{C} est parallèle à Δ .

Exercice 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$.
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n , divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B , divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
 - (a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
 - (b) Montrer que d divise n .
 - (c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
 - (a) Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.
 - (b) Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.
 - (c) Montrer que p divise n . En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

1. (a) Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
(b) Étudier les variations de la fonction f .
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .
 - (a) On a tracé la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe \mathcal{C} d'abscisses respectives u_1 et u_2 . Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) .
 - (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $e \leq u_n \leq 5$.
 - (c) Déterminer les variations de (u_n) .
 - (d) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[e ; 5]$.
 - (e) En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$;
 $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$, $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur \vec{w} d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.
- (a) Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur \vec{w} .
- (b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.
- (c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
Placer les points P, Q, R et S.
2. (a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
- (b) Calculer $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.
En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.
- (c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté \mathcal{C} . On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ .
3. La droite (AP) est-elle tangente au cercle \mathcal{C} ?

Nom :

Annexe de l'exercice 1

