# Bac Blanc 6 février 2008

① (Commun à tous les candidats) $f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$ $x \geqslant 0$.

① ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ donc par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

d'où par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-e^{-x} = 2$.

d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

ⓑ Soit $h(x) = f(x) - (2x-2)$ pour $x \geqslant 0$

$= -e^{-x}(x-1) = e^{-x} - xe^{-x}$

$$\left.\begin{array}{l} X = -x \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{+X} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{par composée}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0$$

De plus d'après ⓐ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} h = 0$

On déduit que $\Delta : y = 2x-2$ est asymptote oblique à $C$ en $+\infty$.

ⓒ Etudions le signe de $h$ : $\forall x \geqslant 0$, $h(x) = e^{-x}(1-x)$

et $\forall x \geqslant 0$, $e^{-x} > 0$ d'où $h$ a le signe de $1-x$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |

On déduit que pour $x \in [0,1]$ $C$ est au-dessus de $\Delta$

et pour $x \geqslant 1$ $C$ est en-dessous de $\Delta$.

② ⓐ $f$ dérivable pour $x \geqslant 0$ d'après les règles de dérivabilité.

$\forall x \geqslant 0$, $f'(x) = 2 - e^{-x} + (x-1)(+e^{-x})$

$= xe^{-x} + 2(1-e^{-x})$

ⓑ $\forall x > 0$ ; $-x < 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} < 1$ car exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0$

d'autre part, $xe^{-x} > 0$ d'où par somme $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

ⓒ $f'(0) = 0$ donc à l'origine $C$ présente une demi-tangente horizontale.

Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

③ $$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } \mathbb{R}_+^* \text{ car dérivable} \\ f \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ f(0) = -1 \;;\; \lim\limits_{+\infty} f = +\infty \\ 3 \in [-1 ; +\infty[ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Thm bijection} \\ \Rightarrow \text{il existe } \alpha > 0 \\ \text{unique solution de} \\ f(x) = 3 \end{array}$$

on a $\left.\begin{array}{l} f(2,56) \simeq 2,9994 < 3 \\ f(2,57) \simeq 3,0198 > 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in ]2,56 ; 2,57[$

④ Soit $A(a, f(a))$ ; $a \geq 0$ ; $T_a$ la tangente en $A$ à $C$.

$\Delta // T_a \iff T_a$ et $\Delta$ ont même coefficient directeur

$\iff f'(a) = 2$

$\iff a e^{-a} - 2e^{-a} = 0$

$\iff e^{-a}(a-2) = 0 \iff a = 2$ car $e^{-a} > 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Donc au point $A(2; 2 - e^{-2})$ la tangente à $C$ est parallèle à $\Delta$.

Ⓘⓘ Pour les non-spécialistes

① $y' + y = e^{-x}$. (E).

$\forall x \in \mathbb{R}$,
$u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x}$
$= e^{-x} \implies u$ est solution particulière de (E).

② $y' + y = 0 \iff y' = -y$ et par théorème, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $f$ de la forme $f(x) = Ce^{-x}$ ; $x \in \mathbb{R}$ et $C$ constante réelle.

③ $v - u$ solution de $(E_0) \iff (v-u)' + v - u = 0$

$\iff v' + v = u' + u$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}$, $v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)$

$\iff v'(x) + v(x) = e^{-x}$ car $u$ solution de (E)

$\iff v$ solution de (E).

④ $v$ solution de (E) $\iff v - u$ solution de $(E_0)$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) - u(x) = Ce^{-x}$ avec $C$ constante

$\iff \forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $v$ de la forme $v(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$ ; $x \in \mathbb{R}$ $C$ constante

⑤ $v(0) = 2 \iff C = 2$ d'où $f_2(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$

$\iff f_2(x) = e^{-x}(2 + x)$

Ⓘⓘⓘ Pour les non spécialistes

① Soit $\varphi_a(x)$ définie pour $x > 0$ par $\varphi_a(x) = \ln(ax)$.

$x \longmapsto ax$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$
$X \longmapsto \ln X$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
} par composée $\implies \varphi_a$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\forall x > 0$ $\varphi_a'(x) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x}$

$\varphi_a$ est donc une primitive de $\frac{1}{x} \implies \varphi_a$ et $\ln$ diffèrent d'une constante :

il existe $k$ tq $\forall x > 0$ ; $\varphi_a(x) = \ln x + k$

et $\varphi_a(1) = \ln a$ d'où $\varphi_a(x) = \ln x + \ln a \ \forall x > 0$.

② d'après ce qui précède $\ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln b + \ln \frac{1}{b}$

$\Leftrightarrow \ln 1 = \ln b + \ln \frac{1}{b} \Leftrightarrow \underline{\ln \frac{1}{b} = -\ln b.}$

et donc $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \underline{\ln a - \ln b.}$

③ $\ln(\frac{3}{8}) = \ln 3 - \ln 8$
$= \ln 3 - 3\ln 2.$

on a $1{,}09 \leq \ln 3 \leq 1{,}10$ et $0{,}69 \leq \ln 2 \leq 0{,}70$

$\Leftrightarrow 3 \times 0{,}69 \leq 3\ln 2 \leq 3 \times 0{,}70$

$\Leftrightarrow -3 \times 0{,}70 \leq -3\ln 2 \leq -3 \times 0{,}69$

donc par somme $1{,}09 - 3 \times 0{,}7 \leq \ln \frac{3}{8} \leq 1{,}1 - 3 \times 0{,}69$

d'où $\underline{-1{,}01 \leq \ln \frac{3}{8} \leq -0{,}97.}$

IV (Commun à tous les candidats)

$f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ; $x > 1$

① ⓐ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln x = 0^+$ d'où par quotient et règle des signes : $\underline{\lim\limits_{1} f = +\infty}$

par thm des croissances comparées $\underline{\lim\limits_{+\infty} f = +\infty.}$

ⓑ $f$ dérivable sur $]1; +\infty[$ d'après les règles de dérivation et

$\forall x > 1, \; f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \underline{\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}}$

$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1$

$\Leftrightarrow x > e$ car exp strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

d'autre part $\forall x > 1$, $(\ln x)^2 > 0$ d'où le signe de $f'$ est celui $\ln x - 1$, il est donc donné par le tableau

| $x$ | $1$ | | $e$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |

On a donc $\underline{f \text{ strictement croissante sur } [e; +\infty[ \text{ et } f \text{ strictement décroissante sur } ]1, e].}$

② ⓐ On conjecture que $(U_n)$ est décroissante et qu'elle converge vers $\ell$ tq $f(\ell) = \ell$.

ⓑ Montrons par récurrence sur $n$, que la propriété $P_n : u_n \in [e; 5]$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Etape 1</u> : $u_0 = 5$ ; d'où $e \leq u_0 \leq 5 \Rightarrow P_0$ est vraie.

<u>Etape 2</u> : Soit $q \in \mathbb{N}$ ; supposons $P_q$ vraie et montrons $P_{q+1}$ vraie.

$P_q$ vraie $\Leftrightarrow e \leq u_q \leq 5$

$\Leftrightarrow f(e) \leq f(u_q) \leq f(5)$ car $f$ strictement croissante sur $[e; +\infty[$

$\Leftrightarrow e \leq u_{q+1} \leq \frac{5}{\ln 5} \leq 5$ donc $\underline{P_{q+1} \text{ est vraie.}}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $e \leq u_n \leq 5$.

ⓒ $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

$$= \frac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \frac{u_n}{\ln u_n}(1 - \ln u_n)$$

or $\forall n$, $u_n \geq e$ d'après ⓑ d'où $\ln(u_n) \geq 1$

d'où $\left.\begin{array}{l} 1 - \ln u_n < 0 \\ u_n > 0 \\ \ln u_n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0.$ donc $(u_n)$ strictement décroissante.

ⓓ $(u_n)$ est minorée par $e$ et décroissante donc $(u_n)$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$

de plus d'après ⓑ $\ell \in [e;5]$

$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_n \text{ converge vers } \ell \\ f \text{ est continue sur } [e;5] \end{array}\right\} \Rightarrow$ d'après le th du point fixe $\ell = f(\ell)$

ⓔ $f(\ell) = \ell \iff \dfrac{\ell}{\ln \ell} = \ell \iff \dfrac{\ell}{\ln \ell}(1 - \ln \ell) = 0 \iff \ell = 0$ ou $\ell = e$

$\ell = 0$ est à exclure car $\ell \in [e;5]$ d'où $\ell = e$.

Ⓥ Commun à tous les candidats.

①ⓐ Ecriture complexe de $t_{\vec{w}}$ : $z' = z - 1 + \frac{5}{2}i$

$t_{\vec{w}}(B) = Q$ d'où $z_Q = z_B - 1 + \frac{5}{2}i \Rightarrow \boxed{z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i}$

ⓑ Ecriture complexe de $h_{(C;-\frac{1}{3})}$ : $z' = z_C - \frac{1}{3}(z - z_C)$

d'où $z_R = -3 - \frac{1}{4}i - \frac{1}{3}\left(3 + 2i + 3 + \frac{1}{4}i\right)$

$\boxed{z_R = -5 - i}$

ⓒ Ecriture complexe de $r_{(A;-\frac{\pi}{2})}$ : $z' - z_A = e^{-i\pi/2}(z - z_A)$

$\iff z' = \frac{3}{2} + 6i - i\left(z - \frac{3}{2} - 6i\right)$

$r(P) = S \Rightarrow z_S = \frac{3}{2} + 6i - i\left(3 + 2i - \frac{3}{2} - 6i\right)$

$\boxed{z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i}$

②ⓐ $\left.\begin{array}{l} z_{\overrightarrow{SP}} = z_P - z_S = 3 + 2i + \frac{5}{2} - \frac{9}{2}i = \frac{11}{2} - \frac{5i}{2} \\ z_{\overrightarrow{RQ}} = z_Q - z_R = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i + 5 + i = \frac{11}{2} - \frac{5}{2}i \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$

$\Rightarrow$ PQRS parallélogramme

ⓑ $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q} = \dfrac{+\frac{5}{2}i - \frac{11}{2}}{3 + 2i - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i} = \dfrac{5i - 11}{5 + 11i} = \dfrac{i(5 + 11i)}{5 + 11i} = i = e^{i\pi/2}$

d'où $z_R - z_Q = i(z_P - z_Q)$ donc dans la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$

P a pour image R d'où PQ = PR et PQR rectangle en P.

d'où RQRS est un carré

ⓒ PQRS carré donc PQRS est inscrit dans le cercle de centre $\Omega$ centre du carré et rayon $\rho$ longueur de la demi diagonale

$z_\Omega = \frac{z_P + z_R}{2} = \frac{1}{2}(3+2i-5-i) = -1 + \frac{i}{2}$

et $\rho = \frac{PR}{2} = \frac{|z_P - z_R|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+3^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$ d'où $P, Q, R, S \in \mathcal{C}(\Omega, \frac{\sqrt{73}}{2})$

avec $\Omega(-1+\frac{i}{2})$.

③ $P \in \mathcal{C}$ ; $[\Omega P]$ est donc un rayon de $\mathcal{C}$

d'où $(AP)$ tangente à $\mathcal{C} \Leftrightarrow (AP) \perp (\Omega P)$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{AP}) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$.

Calculons $\frac{z_P - z_A}{z_P - z_\Omega} = \frac{3+2i-\frac{3}{2}-6i}{3+2i+1-i/2} = \frac{3-8i}{8+3i} = \frac{i(-3i-8)}{8+3i} = -i$

d'où par thm $(\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{AP}) = \mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc $(AP) \perp (\Omega P)$

$\Rightarrow$ (AP) tangente à $\mathcal{C}$.

<u>Méthode plus rapide</u> : Le produit scalaire : $z_{\overrightarrow{AP}} = \frac{3}{2} - 4i$ ; $z_{\overrightarrow{\Omega P}} = 4 + \frac{3}{2}i$

d'où $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{\Omega P} = \frac{3}{2} \times 4 + (-4) \times \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow (AP) \perp (\Omega P)$.

Ⓘ Exercice de spécialité :

Ⓘ

① $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2+2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = x^4 + 4$

② on déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $x^4+4 = (x^2+2)^2 - 4x^2$

$= (x^2+2-2x)(x^2+2+2x)$ qui est un produit de deux trinômes.

Ⓘ ① $n \geq 2$

d'après ce qui précède, $n^4+4 = (n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$

et $\left.\begin{array}{l} n^2-2n+2 = n^2-2n+1+1 = (n-1)^2+1 \geq 2 \text{ car } n \geq 2 \\ n^2+2n+2 \geq 8 \text{ car } n \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow n^4+4$ composé

donc $n^4+4$ n'est pas premier.

② soit d diviseur de A tq $d \mid n$.

d'où $\left.\begin{array}{l} d \mid n^2-2n+2 \\ d \mid n \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 2$ par combinaison linéaire à coeffs entiers.

③ soit d divisant A et B alors par combinaison linéaire à coeffs entiers

$d \mid A-B \Leftrightarrow d \mid -4n \Leftrightarrow d \mid 4n$

④ $n$ impair

ⓐ $n$ impair $\Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $n = 2k+1$

$A = n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 = (2k)^2 + 1 = 4k^2 + 1$ donc $A$ impair.

$B = n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1 = [2(k+1)]^2 + 1$ donc $B$ impair.

$d = A \wedge B$ donc $d$ impair (sinon $d$ pair et alors $B = kd \Rightarrow B$ pair !)

ⓑ $\left.\begin{array}{l} d \mid A \\ d \mid B \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 4n$ d'après ③. et $\left.\begin{array}{l} d \mid 4n \\ \underset{\text{car } d \text{ impair}}{4 \wedge d = 1} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Gauss}} d \mid n$

ⓒ d'après ② : $\left.\begin{array}{l} d \mid A \\ d \mid n \end{array}\right\} \Rightarrow d \mid 2$ ; de plus $d$ impair $\Rightarrow d = 1$

$\Rightarrow PGCD(A,B) = 1$

⑤ ⓐ Supposons $n$ pair. D'où $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

d'où $n^2 - 2n + 2 = 4k^2 - 4k + 2 \equiv 2 \ (4)$ d'où 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$

ⓑ $n$ pair $\Rightarrow A$ pair et $B$ pair

$\Rightarrow d = A \wedge B$ est également pair d'où $d = 2p$ ; $p \in \mathbb{N}$.

si $p$ est pair alors $p = 2k$ d'où $d = 4k$ et donc $4k \mid A \Rightarrow 4 \mid A$ absurde d'après ⑤ⓐ

donc $p$ est impair. Finalement $d = 2p$ avec $p$ impair

ⓒ D'après ③ : $\left.\begin{array}{l} 2p \mid A \\ 2p \mid B \end{array}\right\} \Rightarrow 2p \mid 4n$ c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}$ tq

$2pk = 4n \Leftrightarrow pk = 2n$ d'où $p \mid 2n$ or $p$ impair $\Rightarrow p \wedge 2 = 1$

et d'après le théorème de Gauss on a donc $p \mid n$

On a alors $\left.\begin{array}{l} p \mid n \\ p \mid A \text{ (car } 2p \mid A) \end{array}\right\} \Rightarrow p \mid 2$ d'après ②

et $p$ impair $\Rightarrow p = 1$

donc $d = 2p = 2$