Devoir de Mathématiques N^o 7 (2 heures)

Le sujet est recto-verso. Les exercices peuvent être traités dans le désordre. Le barême est approximatif.

Exercice 1 (4 points) :

Soit $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z^2.
2. Déterminer la forme exponentielle de z^2.
3. En déduire la forme exponentielle de z.

Exercice 2 (4 points) :

On note A et B les points d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et $3\mathrm{i}$.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 3}{z + \mathrm{i}}$$

1. Etablir que $z' = \mathrm{i}\dfrac{z - z_B}{z - z_A}$ et interpréter géométriquement $\arg z'$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(z)$ tels que z' est imaginaire pur.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points $M(z)$ tels que z' soit un point du cercle de centre O et de rayon 1.
4. Soit M un point du cercle de diamètre [AB] privé de A et B. A quel ensemble appartient le point M' ?

Exercice 3 (5 points) :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère l'application F du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1+\mathrm{i})z + 2.$$

1. Soit A le point d'affixe $-2+2\mathrm{i}$.
   Déterminer les affixes des points A$'$ et B vérifiant respectivement A$'$ = F(A) et F(B) = A.
2. Méthode de construction de l'image de M.
   (a) Montrer qu'il existe un point confondu avec son image. On notera Ω ce point et ω son affixe.
   (b) Etablir que pour tout complexe z distinct de ω, $\dfrac{z'-z}{\omega - z} = -\mathrm{i}$.
   Soit M un point distinct de Ω.
   Comparer MM' et $M\Omega$ et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$. En déduire une méthode de construction de M' à partir de M.

3. Etude de l'image d'un ensemble de points.

   (a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ, des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z + 2 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{2}$.
   Vérifier que B est un point de Γ.

   (b) Démontrer que, pour tout z élément de $\mathbb{C}$

   $$z' + 2 = (1 + \mathrm{i})(z + 2 - 2\mathrm{i}).$$

   Démontrer que l'image par F de tout point de Γ appartient au cercle Γ' de centre A′ et de rayon 2.
   Placer O, A, B, A′, Γ et Γ' sur une même figure.

Exercice 4 (7 points) :

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Unité graphique : **3 cm**
à tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3 + 4\mathrm{i})z + 5\overline{z}}{6}.$$

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = 1$ et $z_C = 3\mathrm{i}$.
   Déterminer les affixes des points A′, B′, C′ images respectives de A, B, C par f.
   Placer les points A, B, C, A′, B′, C′.
2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (avec x et y réels).
   Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x$.
   Tracer (D). Quelle remarque peut-on faire ?
4. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f. Montrer que M' appartient à la droite (D).
5. (a) Montrer que, pour tout nombre complexe z :

   $$\frac{z' - z}{z_{\mathrm{A}}} = \frac{z + \overline{z}}{6} + \mathrm{i}\frac{z - \overline{z}}{3}.$$

   En déduire que le nombre $\frac{z' - z}{z_{\mathrm{A}}}$ est réel.

   (b) En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.
6. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)).
   Effectuer la construction sur la figure.