Devoir de Mathématiques N^o 9 (1 heure 40mn)

Exercice 1 : 10 points

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; unité graphique 2 cm.
On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.
On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de$f$ c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1,
   $(z'-1)(z+1) = -2$.

   (b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.
   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C′) de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   (a) Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.

   (b) Montrer que le point P appartient au cercle (C).

   (c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.
   Montrer que les points A, P′ et Q sont alignés.

   (d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P′ du point P par l'application f.

Exercice 2 : 10 points

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, d'unité graphique 1 cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = \frac{3}{2} + 6\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2} - 6\mathrm{i}$; $z_{\mathrm{C}} = -3 - \frac{1}{4}\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{P}} = 3 + 2\mathrm{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -1 + \frac{5}{2}\mathrm{i}$.

   (a) Déterminer l'affixe z_{Q} du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\overrightarrow{w}$.

   (b) Déterminer l'affixe z_{R} du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

   (c) Déterminer l'affixe z_{S} du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   Placer les points P, Q, R et S.
2. (a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

   (b) Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{R}} - z_{\mathrm{Q}}}{z_{\mathrm{P}} - z_{\mathrm{Q}}}$.
   En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

   (c) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathcal{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.
3. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$?