Devoir de Mathématiques N^o 7 (2 heures)

1 Exercice (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\ln(\cos^2 x + 2)$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 Problème (17 points)

Chaque partie du problème est indépendante des autres sous réserve d'admettre les résultats.

⋆ **Partie A : Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = x\mathrm{e}^x$**

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x$$

   (a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

   (b) Montrer que v est une solution de l'équation (1) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (2).

   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

⋆ **Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2$.

1. Déterminer la limite de g en - ∞ et la limite de g en + ∞.

2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.

3. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$: l'une nomée α dans $]-\infty; -\ln 2[$ et l'autre β dans $]-\ln 2; +\infty[$.
   (b) Vérifier que $\beta = 0$
   (c) Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

⋆ **Partie C : Etude de la fonction principale**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x + 1)\mathrm{e}^x$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ où α est défini dans la partie **B**.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
   (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.)

3. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
   Dresser le tableau de variation de f.