Devoir de Mathématiques N^o 6 (1 heure)

Exercice 1 ($4,5$ points)

Soit f définie sur $I = [0; \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\tan x} - 1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etablir que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\tan x} - 1}{x} = 1$.
2. f est-elle continue sur I ?
3. f est-elle dérivable sur I ?

Exercice 2 (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $e^{(x^2)} \leq \dfrac{1}{e}$.
2. $e^x + 1 \leq \dfrac{6}{e^x}$.
3. $e^{\ln x + \ln 2} - x^2 = 0$.

Exercice 3 (3 points)

Déterminer les limites des fonctions suivantes à l'endroit indiqué.

1. $f(x) = \dfrac{e^x - e}{x - 1}$ en 1.
2. $f(x) = e^{x^2} - e^{x+1}$ en $+\infty$.

Exercice 4 ($8,5$ points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1);$$

$\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Jusitifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f .
3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.
   (b) En déduire que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   (c) Etudier la position relative de Δ et $\mathscr{C}$.