Devoir de Mathématiques N^o 5 (2 heures)

Exercice 1 (5 points)

Déterminer la primitive de la fonction f sur I telle que $F(x_0) = y_0$:

1. $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$ avec $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$ et $F(0) = 0$.
2. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ avec $I =]-1; 1[$ et $F(0) = 0$.
3. $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$ avec $I = \mathbb{R}$ et $F(\frac{\pi}{2}) = 0$.
4. $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ avec $I = [1; +\infty[$ et $F(e) = 1$.

Exercice 2 (3 points)

Déterminer les limites des fonctions suivantes à l'endroit indiqué.

1. $f(x) = \ln(3x^4 - 4x^3 + 2) - \ln(9x^6 + 1)$ en $+\infty$.
2. $f(x) = \frac{x^2 - x\ln x}{x + \ln x}$ en $+\infty$.
3. $f(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$ en 0.

Exercice 3 (3 points)

Restitution organisée de connaissances <u>*Pré-recquis :*</u> *La fonction logarithme népérien, notée* ln, *est la fonction dérivable sur* $]0; +\infty[$ *dont la dérivée est la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *et telle que* $\ln 1 = 0$.

On rappelle le théorème suivant :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeur dans un intervalle J de $\mathbb{R}$ et v est une fonction dérivable sur J, alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout x appartenant à I,

$$(v \circ u)' = v'[u(x)] \times u'(x).$$

1. Démontrer que si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, strictement positive sur I, alors la fonction g définie sur I par $g(x) = \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$
2. (a) Démontrer que la fonction $f : x \mapsto x\ln(\sin x)$ est définie et dérivable sur $]0; \pi[$ et déterminer sa dérivée f'.

   (b) Soit g la fonction définie sur $[0; \pi[$ par
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   g est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 4 (9 points)

Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

1. **Etude d'une fonction auxilliaire** Soit g la fonction définie sur I par :

$$g(x) = 1 + x - x \ln x$$

   (a) Etudier les limites de g en chacunes des bornes de son ensemble de définition.

   (b) Etudier les variations de g et construire son tableau de variation.

   (c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur I. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   (d) Déduire de ce qui précède le signe de g sur I.

2. **Etude et représentation graphique de la fonction** f

   (a) Etudier les limites de f en chacune des bornes de son ensemble de définition.

   (b) Justifier que f est dérivable sur I, et montrer que pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$$

   (c) En déduire le signe de f' et dresser le tableau de variation de f sur I.

   (d) On admet que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.

   (e) Déterminer une équation réduite de la tangente T de $\mathscr{C}$ au point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe de abscisses.

   (f) Tracer sommairement $\mathscr{C}$