Devoir de Mathématiques N^o 4 (1 heure)

Exercice 1 (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x-2)+\ln(x+3)=\ln x$
2. $\ln(2x-3)-\ln(x+2)\leq \ln 2$

Exercice 2 (4 points)

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+x^2-6}{x}$; sur $I=]0;+\infty[$.
2. $f(x)=\dfrac{x^2}{(x^3+12)^2}$; sur $I=]0;+\infty[$.
3. $f(x)=x\sqrt{x^2+3}$; sur $I=\mathbb{R}$.
4. $f(x)=\sin^2 x$; sur $I=\mathbb{R}$.

Exercice 3 (3 points)

Etudier les limites de la fonction f à l'endroit indiqué.

1. $f(x)=\ln(\dfrac{x^2-3x+1}{x})$ en $+\infty$.
2. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ en 1.
3. $f(x)=\sqrt{\ln x}-x$ en $+\infty$

Exercice 4 (4 points)

Soit f définie sur $]1;+\infty[$, par :

$$f(x)=x+\ln(x^2-1)$$

1. Montrer que f strictement croissante et dresser son tableau de variations, limites comprises.
2. Démontrer que $f(x)=0$ admet une solution unique sur I.

Exercice 5 (5 points)

Soit f définie sur $I=]0;+\infty[$ par $f(x)=x-4+\ln(\dfrac{x}{x+1})$

1. Montrer que $f'(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)}$ pour tout $x\in I$.
2. Etudier f et dresser son tableau de variation (limites comprises).
3. (a) Démontrer que la droite D d'équation $y=x-4$ est asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.
   (b) Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.