Devoir de Mathématiques N^o 3 (2 heure)

Exercice 1 ($3,5$ points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 + x - 3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos(\pi x) + 1}{x - 1} = 0$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. f est-elle dérivable en 1 ? Donner alors une interprétation géométrique.

Exercice 2 ($1,5$ points)

Déterminer

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{5x}{-x^2 + 5x - 4}$$

Exercice 3 (3 points)

Soit f définie sur $I = [-3; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x^2(x+3)}$$

1. Etudier la dérivabilité de f en -3 et interpréter graphiquement le résultat.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0, et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 4 (5 points)

Soit f définie sur $I =]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \sin x - \tan x$$

1. Montrer que f est impaire.
2. Etudier $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$.
3. Etablir le tableau de variation de f sur I.

Exercice 5 (7 points)

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans un repère du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$x - \sqrt{x^2 + 4} < 0$$

   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et donner une interprétation géométrique.
3. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
   (b) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.
   (c) Etudier la position relative de Δ et $\mathscr{C}$.
4. Etudier les variations de f et représenter sommairement $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
5. Soit $k > 0$, montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (2 points)

1. Déterminer les primitives de $f(x) = (2x - 5)^3$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$f(x) = x + 3\sin x$$

   et satisfaisant $F(0) = 1$.