Devoir de Mathématiques N^o 2 (1 heure)

Exercice 1 (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}; & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (6 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^3 + 3x + 4$$

1. Etablir les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α. Déterminer n encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 3 (2 points)

Pour chacune des propositions, dite si elle vraie ou fausse. Justifiez votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple

1. Soit A un nombre réel quelconque, et f une fonction définie sur $I = [A; +\infty[$.
   Si f est strictement décroissante alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
2. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1.$$
3. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que
   $$0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$$
   alors
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Exercice 4 (5 points)

f désignant une fonction, interpréter chacune des phrases suivantes en terme de limite de f. **On ne demande aucune justification**.

1. Pour tout intervalle I ouvert de centre -1, il existe $M > 0$ tel que l'intervalle I contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x \geq M$.
2. Pour tout A positif, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x < -M$ toutes les valeurs de $f(x)$ sont dans l'intervalle $]-\infty; -A[$.

Exercice 5 (4 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xE(x)$ où E représente la fonction partie entière. On note $I_k = [k; k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Justifier que f est continue sur les intervalles $J_k =]k; k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. Expliciter f sur les intervalles I_k.
3. f est-elle continue en 0 ? (justifier votre réponse).
4. f est-elle continue en 1 ? (justifier votre réponse).