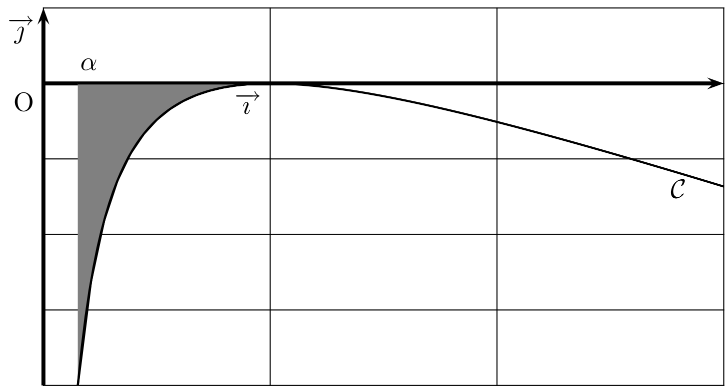
Devoir de Mathématiques (4 heures)

Exercice 1 : (5 points)

Commun à tous les candidats

La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



1. (a) Soit f' la fonction dérivée de f, montrer que pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de

$$N(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x.\right]$$

   (b) Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

   (c) En déduire le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ d'ordonnée maximale.

   (d) Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution x_0 unique sur $]0; 1]$.

2. α désigne un réel de $]0\ ; 1[$. On note $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les droites d'équation $y = 0$, $x = \alpha$, $x = 1$ et la courbe $\mathscr{C}$.

   (a) Exprimer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

   (b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1\ ; 2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

4. On admet que pour tout réel x élément de $[1\ ; 2]$, on a l'inégalité $0 \leq \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$.

   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[1\ ; 2]$.

5. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

6. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

   (b) Déterminer la valeur exacte de ℓ.

Exercice 2 : (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances*
   Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :
   – $R(\Omega) = \Omega$
   – Pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par
   $$\Omega M' = \Omega M \text{ et } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \quad [2\pi].$$
   On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b,
   $$AB = |b-a| \text{ et } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi].$$
   Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R, sont liées par la relation
   $$z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega).$$
2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_I = 1+i$ et $z_B = 2+2i$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$. On prendra pour la figure 2 cm comme unité graphique.
   (a) Donner l'écriture complexe de R.
   (b) Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_A de A.
   (c) Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
   (d) En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right)$.
3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A' = T(A)$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A'.
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?
   (c) Montrer que $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

Exercice 2 : (5 points)

Candidat ayant suivi l'épreuve de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :
   $$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\overline{z} - 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right).$$
   (a) Calculer les affixes des points $A' = f(A)$ et $C' = f(C)$.
   (b) En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.
   (c) Placer les points A, B et C puis construire le point $B' = f(B)$.
2. (a) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
   (b) Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe
   $z'' = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i$.
3. (a) Soit M_0 le point d'affixe $2-4i$.
   Determiner l'affixe du point $M_0'' = g(M_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ sont orthogonaux.
   (b) On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.
   Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux si, et seulement si $5x + 3y = -2$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x + 3y = -2$.
   (d) En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6 \ ; \ 6]$ tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

Exercice 3 : (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.
   (a) Justifier que, si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.
   (b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,
   $$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
   $$F(x) = [\ln(x+3)]^2\,.$$
   (a) Justifier la dérivabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.
   (b) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$.
   Calculer I_n.
4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
   Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 4 : (5 points)

Commun à tous les candidats

Un commerce possède un rayon « journaux »et un rayon « souvenirs ». à la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisse de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon « journaux »contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face differe et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique. Ainsi, 40% des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs »et 8% de celle du rayon « journaux »portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».
   (a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
   (b) Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
   On prélève au hasard une pièce du sac.
   On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs »et E l'évènement « la pièce porte une face étrangère ».
   (a) Déterminer $P(S)$, $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.
   (b) Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.
   (c) Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».
3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16.
   Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
   Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.