

Devoir de Mathématiques N° 13 (1 heure)

Exercice 1 : (6 points)

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 €; si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 € et si une seule est rouge il gagne 4 €. Dans tous les autres cas, il ne gagne rien.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
2. Pour un jeu, la mise est de 10 €. Le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire l'espérance mathématique est-elle strictement supérieure à 10?

Exercice 2 : (5 points)

Alice débute au jeu de fléchette. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chance d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout entier naturel n on considère les événements suivants :

A_n : « Alice atteint la cible au n^{e} coup ».

B_n : « Alice rate la cible au n^{e} coup ».

On pose $P_n = p(A_n)$.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}.$$

Exercice 3 : (9 points)

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

On définit les événements :

A : « On tire dans l'urne A »

B : « On tire dans l'urne B »

N : « On tire une boule noire »

R : « On tire une boule rouge »

V : « On tire une boule verte »

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.
 - (a) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
 - (b) Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir?
 - (c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge?

2. **Ne pas faire - hors barème.** On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

(a) Montrer que la probabilité de l'événement « la 3^e boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.

(b) Certains pensent que l'événement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'événement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai? Justifier.