

Devoir de Mathématiques N° 12 (2 heures)

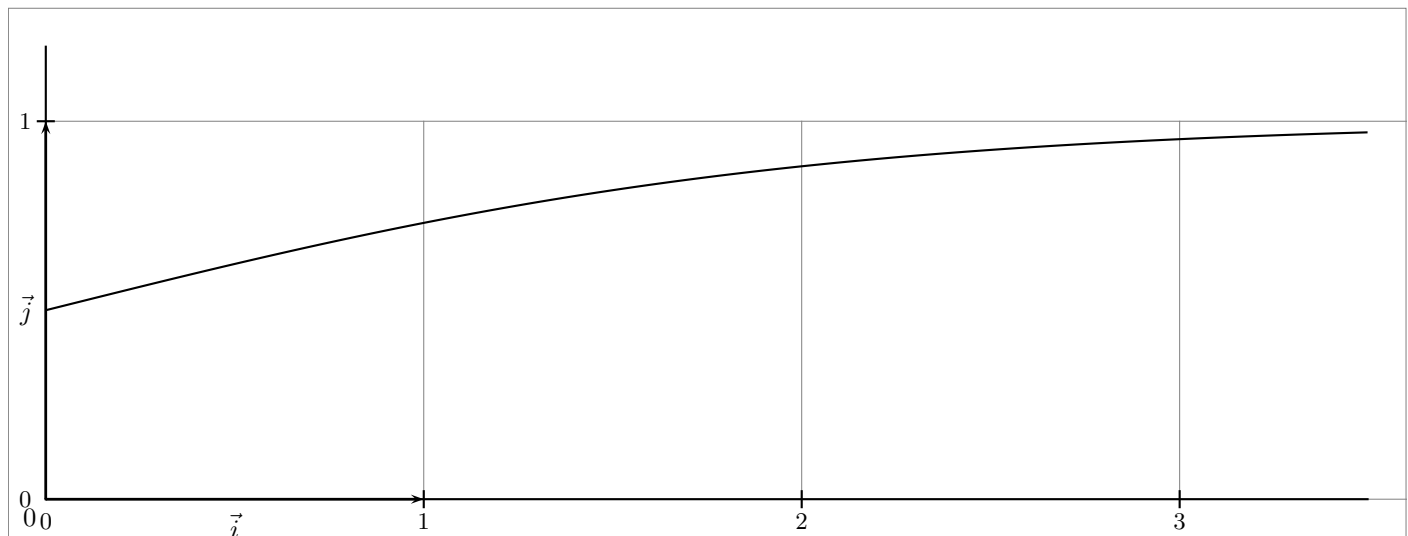
Exercice 1 : 3,5 points

On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 5 cm). Voir graphique ci-joint.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation géométrique.
(b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y = 1$, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$, $\mathcal{A}_n$ désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire en cm^2 .
(a) Calculer $\mathcal{A}_n$.
(b) Étudier la limite éventuelle de $\mathcal{A}_n$, lorsque n tend vers $+\infty$.



Exercice 2 : 6,5 points

Pour tout entier n , on considère l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $[1; e]$ et pour tout entier naturel n , on a

$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$$

- (b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
2. (a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

- (b) Calculer I_0 . En déduire I_1 et I_2 .
3. (a) Démontrer que pour tout n , $I_n \geq 0$
(b) Démontrer que pour tout n , $(n+1)I_n \leq e$
(c) En déduire la limite de I_n

Exercice 3 : 4,5 points

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, dont les tracés se trouvent ci-joint.

On admettra les résultats suivants :

- Les fonctions f et g sont dérivables.
- Sur $\mathbb{R}^+$, f est décroissante.
- g croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.
- $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ s'intersectent au point A d'abscisse 1.
- La limite de f et g en $+\infty$ est 0.

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt.$$

1. Que représente G pour la fonction g ?
2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.
3. Étudier le sens de variations de G sur $\mathbb{R}$.

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel x , $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

4. Démontrer, que, pour tout réel x , $G(x) = \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}]$; (on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x \mapsto \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}]$).

On admet que la fonction F admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et que cette limite ℓ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{A}$ limité par la courbe $\mathcal{C}_f$ et les demi-droites $[O; \vec{i})$ et $[O; \vec{j})$.

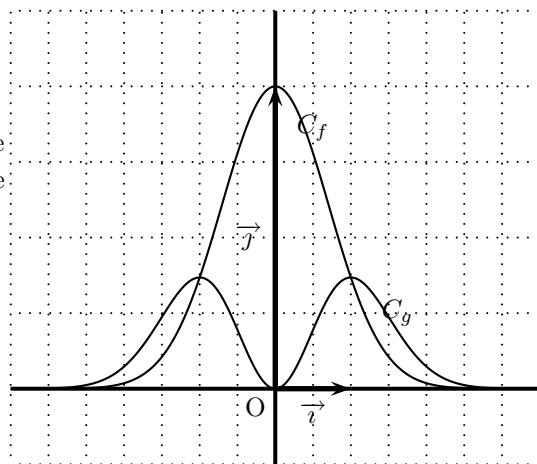
5. (a) Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

(b) Interpréter en termes d'aires le réel $N = \int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2} dt$.

- (c) **Question Bonus :** En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire $\mathcal{P}$ en unités d'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la demi-droite $[O; \vec{i})$ et la courbe $\mathcal{C}_g$ justifier graphiquement que :

$$\int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2} dt \geq \frac{\ell}{2}.$$

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)



Exercice 4 : 5,5 points

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

1. (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $e^{-x} \leq e^x$.
(b) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et dresser le tableau de variations (complet) de f sur $[0; +\infty[$.
2. Pour n entier naturel, on considère

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$$

- (c) En déduire que (I_n) est décroissante.
- (d) Montrer que (I_n) converge.