Devoir de Mathématiques N^o 11 (1 heure)

Exercice 1 : 3 points

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 \frac{3x}{1-x^2}\,dx \qquad\qquad J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2t+1)\sin t\,dt$$

Exercice 2 : 6 points

On considère la suite numérique (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n(2-u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier n on a $0 < u_n < 1$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. En déduire la convergence de (u_n) puis déterminer sa limite.

Exercice 3 : 6 points

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+n+t}\,dt$$

1. Déterminer le sens de variation de cette suite.
2. Montrer que (I_n) est un suite positive.
3. Montrer que pour tout $t \in [0;1]$ on a
$$\frac{e^{-t^2}}{1+n+t} \leq \frac{1}{1+n}$$
4. En déduire l'encadrement
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{1+n}$$
5. Que peut-on en conclure quant à la convergence de (I_n) ?

Exercice 4 : 5 points

Soit g la foncion définie pour tout x strictement positif par

$$g(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt$$

1. Montrer que g est bien définie.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et déterminer sa fonction dérivée g'.
3. Soit $h : x \mapsto g(\tan x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   (a) Déterminer la dérivé h' de h.
   (b) En déduire que pour tout $x > 0$, on a
$$g(\tan x) = x - \frac{\pi}{4}$$

Exercice 5 : (Pour Mardi)

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3 x$.
2. Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,dt$