Baccalauréat général

SESSION BLANCHE Février 2007

Mathématiques

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 heures-COEFFICIENT : 7**

Ce sujet comporte 6 pages numérotée de 1 à 6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants, le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement dans la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - \mathrm{i}$ et $c = 1 + \mathrm{i}$.

1. (a) Placer les points A, B et C sur une figure.

   (b) Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. (a) On appelle r la rotation de centre A telle que $r(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$.
   Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $\mathrm{D} = r(\mathrm{C})$.

   (b) Soit Γ le cercle de diamètre [BC].
   Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

3. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.

   (a) Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0 \,;\, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2} \,;\, 2\pi\right[$ tel que $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   (b) Exprimer z' en fonction de θ.

   (c) Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

   (d) Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M′ par r.

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \quad \text{pour tout entier naturel} \quad n. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n, en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(x + (1-x)\mathrm{e}^{2x}\right].$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, (unité graphique 2 cm)

1. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
   Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1-2x)\mathrm{e}^{2x}$.
   (a) Étudier le sens de variation de u.
   Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ,\ 1]$.
   Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.
   (b) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. (a) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.
   (b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ sur la feuille annexe.

Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}.$$

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c . Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) y' = \frac{y}{4}.$$

   (a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

   (b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est- à-dire $g(0) = 1$.

   (c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_2) \left\{ \begin{array}{lcl} u'(t) & = & \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

   (a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_3) \left\{ \begin{array}{lcl} h'(t) & = & -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

   où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

   (b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

   (c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Annexe de l'exercice 3